№1

1. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -1; \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 7x_4 = -5; \\ 2x_1 + x_2 - 10x_3 - x_4 = 0; \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 = -7. \end{cases}$$

Рассмотрим несколько способов решения систем линейных уравнений в маткад

1 способ: Решение систем уравнений методом Жордана-Гаусса

$ORIGIN := 1$

Задаем порядок единичной матрицы

$n := 4$

Оператором identity(n) зададим единичную матрицу порядка n

Зададим матрицу А- матрицу коэффициентов при переменных в уравнении и матрицу В- матрицу свободных членов

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -2 \\ -1 & 2 & -5 & -7 \\ 2 & 1 & -10 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$E := \mathrm{identity}(n) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

Для этого используем оператор augument(A,B), где матрицы A,B- объединяемые матрицы.

$$AR := \mathrm{augment}(A,B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & -7 & -5 \\ 2 & 1 & -10 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

Найдем ранг матрицы и ранг расширенной матрицы

$\mathrm{rank}(A) \rightarrow 2$

$\mathrm{rank}(AR) \rightarrow 2$

Ранг матрицы системы и расширенной матрицы системы сопадают, значит система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Для решения системы используем метод Жордана- Гаусса:

$$AG := \mathrm{rref}(AR) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим общее решение неоднородной системы AX=B

для составления общего решения используются столбцы матрицы AG, (обозначение столбца указывается в треугольных скобках и набираются на панели "Матрица".

$$X(x3,x4) := AG^{\langle 5 \rangle} - AG^{\langle 4 \rangle} \cdot x4 - AG^{\langle 3 \rangle} \cdot x3 + E^{\langle 4 \rangle} \cdot x4 + E^{\langle 3 \rangle} \cdot x3$$

где x3 и x4 могут быть
любые действительные числа

$$X(x3,x4) \rightarrow \begin{pmatrix} 3\cdot x3 - x4 + 1 \\ 4\cdot x3 + 3\cdot x4 - 2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку:

$$A\cdot X(x3,x4) - B \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем базисное решение, задав свободные переменные равными 0 и сделаем проверку:

$$A\cdot X(0,0) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$X(0,0) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем одно частное решение и сделаем проверку:

$$A\cdot X(1,1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$X(1,1) \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Способ 2:

Решим систему с использованием оператора lsolve:

$$\mathrm{lsolve}(A,B) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Первый столбец показывает базисное решение.
Для получения общего решения свободные переменные задаем x3=c1 и x4=c2.
Общее решение равно сумме первого столбца и второго унноженного на c1 и третьего столбца умноженного на c2.

$$x(c1,c2) := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot c1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot c2 \rightarrow \begin{pmatrix} 3\cdot c1 - c2 + 1 \\ 4\cdot c1 + 3\cdot c2 - 2 \\ c1 \\ c2 \end{pmatrix}$$

№2

1. Решить систему уравнений тремя способами (с помощью обратной матрицы, по формулам Крамера и методом Гаусса):

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11; \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Первый способ решения при помощи оператора lsolve

$$C := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D := \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|C| \rightarrow -34$$

Определитель матрицы системы отличен от нуля
значит система имеет единственное решение.

Решим систему с использованием оператора lsolve:

$$\text{lsolve}(C, D) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Второй способ решения:

1) Решим систему методом обратной матрицы:

$$C^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{34} & \frac{5}{34} & -\frac{3}{34} \\ \frac{2}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} \\ -\frac{5}{34} & \frac{11}{34} & \frac{7}{34} \end{pmatrix}$$

Найдем решение системы:

$$X := C^{-1} \cdot D \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку:

$$C \cdot X - D \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Третий способ решения

2) Решим систему CX=D по формуле Крамера:

$$\text{ORIGIN} := 1$$

Матрица C и столбец свобгдных чисел D нами заданы раньше.

$$\Delta := |C| \rightarrow -34$$

Определитель матрицы отличен от нуля, значит система имеет едипственное решение.

Создадим и вычислим определители матриц, какие получаются из матрицы C заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

$$C1 := \text{augment}\left(D, C^{\langle 2 \rangle}, C^{\langle 3 \rangle}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 11 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta 1 := |C1| \rightarrow -34$$

$$C2 := \text{augment}\left(C^{\langle 1 \rangle}, D, C^{\langle 3 \rangle}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 2 & 11 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta 2 := |C2| \rightarrow 34$

$$C3 := \mathrm{augment}\left(C^{\langle 1\rangle}, C^{\langle 2\rangle}, D\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 11 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta 3 := |C3| \rightarrow -136$

Найдем решение системы

$$X1 := \frac{\Delta 1}{\Delta} \rightarrow 1$$

$$X2 := \frac{\Delta 2}{\Delta} \rightarrow -1$$

$$X3 := \frac{\Delta 3}{\Delta} \rightarrow 4$$

Запишемрешение в матричном виде

$$X := \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Проверим правильность решения

$$C \cdot X - D \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Чктвертый способ решения:

3) Решим систему CX=D Методом Гаусса.

$ORIGIN := 1$

Матрица C и D заданы раньше.
Определитель системы отличен от нуля , значит система имеет единственное решение.

Расширенная матрица системы :

$$CR := \mathrm{augment}(C, D) \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & 11 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(C) \rightarrow 3$

$\mathrm{rank}(CR) \rightarrow 3$

Система совместна и имеет елинственное решение, так как ранг основной и расширенной матрицы системы совпадает с количеством переменных.

Метод Жордана -Гаусса

$$CG := \mathrm{rref}(CR) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Расширенная матрица системы после проведения злементарных преобразований

Находим решение:

$$X := CG^{\langle 4\rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot X - D \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку

№3

1. Решить однородную систему уравнений. Указать фундаментальную систему решений и общее решение:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0; \\ . \end{cases}$$

$ORIGIN := 1$

$$F := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(F) \rightarrow 2$

Ранг матрицы меньше числа переменных, значит однородная система имеет ненулевое решение.

Решим систему методом Жордана - Гаусса:

$$FG := \mathrm{rref}(F) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Мы получили матрицу системы после проведения элементарных преобразований.

Отсюда общее решение системы
x1=(-4/5)x3
x2=(-1/5)x3,
где x3 - любое число

Сформируем общее решение однородной системы FX=0

Общее решение системы

$$X(x3) := (-FG)^{\langle 3\rangle} \cdot x3 + E^{\langle 3\rangle} \cdot x3 \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{4 \cdot x3}{5} \\ -\frac{x3}{5} \\ x3 \end{pmatrix}$$

Частное реение системы, которое является фундаментальной системой решений получается при x3=1

$$X(1) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Проверка правильности решения:

$$F \cdot X(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$