Вариант № 10

Задача 1. Для данной функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $z=x+iy$, найти ее действительную часть $u(x,y)$ и мнимую часть $v(x,y)$

$$f(z)=\frac{1-i}{z+i}+1.$$

Задача 2. Найти область, в которой функция $v(x,y)=x+3y$ является гармонической, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta v=0$ $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\right)$. Найти аналитическую в этой области функцию $f(z)=f(x+iy)$, для которой функция $v(x,y)$ будет являться мнимой частью. Указать соответствующую действительную часть $u(x,y)$.

Задача 3. Вычислить интеграл $\int_l (2zi+Imz)dz$, где l - отрезок прямой от точки $z_1=-i$ до точки $z_2=0$.

Задача 4. Вычислить интеграл $\oint_l \frac{4z+i}{2z}dz$ по замкнутой кривой l: $|z|=1$. Обход осуществляется против хода часовой стрелки.

Задача 5. Методом конечных разностей при $h=0.1$ и $l=0.02$ найти приближенные значения $u(ih,kl)=u_{i,k}$ $(i=1,2,3,4;\quad k=1,2,3,4)$ решения $u(x,t)$ первой краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad a^2=\frac{1}{5};$$

$$u(x,0)=1-4x^2,\qquad 0\le x\le 0.5;$$

$$u(0,t)=1-10t,\qquad 0\le t\le 0.08;$$

$$u(0.5;t)=5t,\qquad 0\le t\le 0.08.$$