

Вариант № 4

Задача 1. Для данной функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $z = x + iy$, найти ее действительную часть $u(x, y)$ и мнимую часть $v(x, y)$

$$f(z) = \frac{4z}{i} - z^2.$$

Задача 2. Найти область, в которой функция $v(x, y) = 4y - x$ является гармонической, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta v = 0$ $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \right)$. Найти аналитическую в этой области функцию $f(z) = f(x + iy)$, для которой функция $v(x, y)$ будет являться мнимой частью. Указать соответствующую действительную часть $u(x, y)$.

Задача 3. Вычислить интеграл $\int_l (3i + 2\bar{z}) dz$, где l - отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.

Задача 4. Вычислить интеграл $\oint_l \frac{z}{2z - i} dz$ по замкнутой кривой $l: |z| = 1$. Обход осуществляется против хода часовой стрелки.

Задача 5. Методом конечных разностей при $h = 0.2$ и $l = 0.05$ найти приближенные значения $u(ih, kl) = u_{i,k}$ ($i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, \dots, 6$) решения $u(x, t)$ первой краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{1}{3};$$

$$u(x, 0) = 1 - \frac{5}{2}x^2, \quad 0 \leq x \leq 0.8;$$

$$u(0, t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 0.3;$$

$$u(0.8; t) = 2t - 1, \quad 0 \leq t \leq 0.3.$$