Вариант № 5

Задача 1. Для данной функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $z=x+iy$, найти ее действительную часть $u(x,y)$ и мнимую часть $v(x,y)$

$$f(z)=\overline{z}+\frac{1}{2z}-4i.$$

Задача 2. Найти область, в которой функция $u(x,y)=5x+y$ является гармонической, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u=0$ $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\right)$. Найти аналитическую в этой области функцию $f(z)=f(x+iy)$, для которой функция $u(x,y)$ будет являться действительной частью. Указать соответствующую мнимую часть $v(x,y)$.

Задача 3. Вычислить интеграл $\int\limits_l (2\overline{z}-1)dz$, где l - отрезок прямой от точки $z_1=-2i$ до точки $z_2=1-2i$.

Задача 4. Вычислить интеграл $\oint\limits_l \frac{z+i}{z-2}dz$ по замкнутой кривой l: $|z|=3$. Обход осуществляется против хода часовой стрелки.

Задача 5. Методом конечных разностей при $h=0.1$ и $l=0.01$ найти приближенные значения $u(ih,kl)=u_{i,k}$ $(i=1,2,3,4;\ \ k=1,2,3,4)$ решения $u(x,t)$ первой краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad a^2=\frac{2}{5};$$

$$u(x,0)=4x^2+2x-1, \qquad 0\le x\le 0.5;$$

$$u(0,t)=25t-1, \qquad 0\le t\le 0.04;$$

$$u(0.5;t)=1, \qquad 0\le t\le 0.04.$$