Вариант № 7

Задача 1. Для данной функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $z=x+iy$, найти ее действительную часть $u(x,y)$ и мнимую часть $v(x,y)$

$$f(z)=\frac{z}{1-i}+\bar{z}^2.$$

Задача 2. Найти область, в которой функция $u(x,y)=x-2y$ является гармонической, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u=0$ $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\right)$. Найти аналитическую в этой области функцию $f(z)=f(x+iy)$, для которой функция $u(x,y)$ будет являться действительной частью. Указать соответствующую мнимую часть $v(x,y)$.

Задача 3. Вычислить интеграл $\int\limits_l (z+\operatorname{Re} z)dz$, где l - отрезок прямой от точки $z_1=1$ до точки $z_2=1-i$.

Задача 4. Вычислить интеграл $\oint\limits_l \frac{4i}{z+2}dz$ по замкнутой кривой $l: |z|=3$. Обход осуществляется против хода часовой стрелки.

Задача 5. Методом конечных разностей при $h=0.15$ и $l=0.01$ найти приближенные значения $u(ih,kl)=u_{i,k}$ $(i=1,2,3;\ k=1,2,...,6)$ решения $u(x,t)$ первой краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad a^2=\frac{5}{6};$$

$$u(x,0)=x(3-5x)-1,\qquad 0\le x\le 0.6;$$

$$u(0,t)=-20t-1,\qquad 0\le t\le 0.06;$$

$$u(0.6;t)=30t-1,\qquad 0\le t\le 0.06.$$