Вариант № 8

Задача 1. Для данной функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $z=x+iy$, найти ее действительную часть $u(x,y)$ и мнимую часть

$$f(z)=\frac{2}{z^2}-i.$$

Задача 2. Найти область, в которой функция $v(x,y)=y-2x$ является гармонической, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta v=0$ $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\right)$. Найти аналитическую в этой области функцию $f(z)=f(x+iy)$, для которой функция $v(x,y)$ будет являться мнимой частью. Указать соответствующую действительную часть $u(x,y)$.

Задача 3. Вычислить интеграл $\int\limits_l (i-2\overline{z})dz$, где l - отрезок прямой от точки $z_1=-1$ до точки $z_2=-1+i$.

Задача 4. Вычислить интеграл $\oint\limits_l \frac{z}{z+2i}dz$ по замкнутой кривой l: $|z|=3$. Обход осуществляется против хода часовой стрелки.

Задача 5. Методом конечных разностей при $h=0.2$ и $l=0.05$ найти приближенные значения $u(ih,kl)=u_{i,k}$ $(i=1,2,3;\quad k=1,2,\dots,6)$ решения $u(x,t)$ первой краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad a^2=\frac{1}{4};$$

$$u(x,0)=0, \qquad 0\le x\le 0.8;$$

$$u(0,t)=2t(t+1), \qquad 0\le t\le 0.3;$$

$$u(0.8;t)=-3t, \qquad 0\le t\le 0.3.$$