

Вариант № 9

Задача 1. Для данной функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $z = x + iy$, найти ее действительную часть $u(x, y)$ и мнимую часть $v(x, y)$

$$f(z) = z|\bar{z} + i|^2.$$

Задача 2. Найти область, в которой функция $u(x, y) = 3y - x$ является гармонической, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \right)$. Найти аналитическую в этой области функцию $f(z) = f(x + iy)$, для которой функция $u(x, y)$ будет являться действительной частью. Указать соответствующую мнимую часть $v(x, y)$.

Задача 3. Вычислить интеграл $\int_l (i\bar{z} + 1) dz$, где l - отрезок прямой от точки $z_1 = i$ до точки $z_2 = 2 + i$.

Задача 4. Вычислить интеграл $\oint_l \frac{9z}{3z - 2i} dz$ по замкнутой кривой $l: |z| = 1$. Обход осуществляется против хода часовой стрелки.

Задача 5. Методом конечных разностей при $h = 0.25$ и $l = 0.02$ найти приближенные значения $u(ih, kl) = u_{i,k}$ ($i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, \dots, 5$) решения $u(x, t)$ первой краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{4}{5};$$

$$u(x, 0) = 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$u(0, t) = 10t + 1, \quad 0 \leq t \leq 0.1;$$

$$u(1, t) = t^2, \quad 0 \leq t \leq 0.1.$$