Часть 1

Элементы математической логики

Лекции 1–4

Математическая логика — это анализ методом рассуждений, при этом в первую очередь исследуются формы рассуждений, а не их содержание, т. е. математическая логика исследует соотношения между основными понятиями математики, на базе которых доказываются математические утверждения. Простейшую из формальных логических теорий называют *алгеброй высказываний*, поэтому начнем знакомство с элементами математической логики с такого понятия, как *высказывание*, которое лежит в основе логико-математической теории дискретной математики.

1. Составные высказывания

Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

Приведем примеры высказываний.

Пример 1. Волга впадает в Каспийское море.

Пример 2. Два больше трех.

Первое высказывание является истинным, а второе — ложным.

Таким образом, высказывание обладает свойством представлять истину или ложь, поэтому на высказывание можно смотреть как на величину, которая может принимать только одно из двух значений: «истина», «ложь».

Поставим в соответствие высказыванию логическую переменную x, которая принимает значение 1, если высказывание истинно, и 0, если высказывание ложно.

Мы не будем исследовать внутреннюю структуру высказываний, потому что такое исследование оказывается достаточно трудным и относится скорее к лингвистике, чем к математике. Поэтому мы будем поступать так, как если бы мы знали все о простых высказываниях, и будем изучать лишь их сочетания, т. е. как различными способами из отдельных высказываний можно построить новое высказывание.

Это новое высказывание называется *составным*, в то время как высказывания, из которых оно образовано, называются его простыми составляющими или компонентами. Любое высказывание, даже такое, которое на самом деле является сложным, может быть использовано в качестве одного из простых составляющих какого-то другого составного высказывания.

2. Простейшие связки

Значение истинности составного высказывания определяется значениями истинности его компонент.

Высказывания будем обозначать прописными буквами латинского алфавита X, Y, Z ... .

Составные высказывания будем получать из простых с помощью логических операций: *отрицание*, *конъюнкция*, *дизъюнкция*, *импликация*, *эквивалентность*, которые осуществляются при помощи логических связок: $\overline{}$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$.

Название	Прочтение	Обозначение
Отрицание	не	$\overline{}$
Конъюнкция	и	$\wedge$
Дизъюнкция	или	$\vee$
Импликация	если...то	$\rightarrow$
Эквивалентность	тогда и только тогда, когда	$\leftrightarrow$

При рассмотрении той или иной связки мы хотим знать, каким именно образом истинность составного высказывания, порожденного этой связкой, зависит от истинности его компонент. Очень удобно изображать эту зависимость, пользуясь таблицами истинности, которые называются также интерпретациями логических операций. Каждой строке таблицы истинности взаимно однозначно соответствует набор составляющих высказываний и соответствующее значение составного высказывания. Наборы из нулей и единиц, соответствующих составляющим высказываниям, в каждой строке таблицы истинности имеют стандартное расположение, т. е. расположены в лексикографическом порядке (порядке возрастания).

Пусть даны два произвольных высказывания X и Y.

Отрицанием высказывания X называется высказывание $\overline{X}$, которое истинно, когда X ложно, и ложно, когда X истинно.

Таблица истинности для отрицания.

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

Конъюнкцией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \wedge Y$, которое истинно только в том случае, когда X и Y оба истинны.

Таблица истинности для конъюнкций.

X	Y	$X \wedge Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкцией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \vee Y$, которое истинно, когда хотя бы одно из них истинно.

Таблица истинности дизъюнкций.

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликацией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \to Y$, которое ложно тогда и только тогда, когда X истинно, а Y ложно.

Таблица истинности для импликации.

X	Y	$X \to Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентностью высказываний X и Y называется высказывание $X \leftrightarrow Y$, которое истинно тогда и только тогда, когда X и Y оба истинны или ложны.

Таблица истинности для эквивалентности.

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Для образования составных высказываний наряду с единичным использованием каждой основной связки можно пользоваться основными связками многократно, получая более сложные составные высказывания — аналогично тому, как с помощью основных арифметических операций образуются сложные алгебраические выражения.

Например, составными будут высказывания:

$$\overline{(X \wedge Y)}; \quad X \wedge \overline{X}; \quad (X \vee Y) \vee \overline{X}.$$

Их следует читать «изнутри наружу», подобно алгебраическим выражениям, в которых сначала группируются величины, заключенные в самые внутренние скобки, затем эти скобки в свою очередь группируются и т. д. Если скобок нет, то операции надо выполнять в следующем порядке: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность, отрицание. Каждое составное высказывание имеет свою таблицу истинности, которая может быть построена стандартным образом.

3. Другие связки

Новые высказывания могут быть образованы при помощи нескольких логических операций и составлять формулы, некоторые из которых рассматриваются как логические операции, осуществляемые при помощи других логических связок: $|$; $\downarrow$; $\oplus$.

Название	Прочтение	Обозначение
Штрих Шеффера	Антиконъюнкция	$\vert$
Стрелка Пирса	Антидизъюнкция	$\downarrow$
Сумма по модулю два	Антиэквивалентность	$\oplus$

Штрих Шеффера, $X \mid Y$ или антиконъюнкция, по определению $(X \mid Y) = \overline{X \wedge Y}$.

Таблица истинности штриха Шеффера.

X	Y	$X \vert Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Стрелка Пирса, или антидизъюнкция, по определению $X \downarrow Y = \overline{X \vee Y}$.

Таблица истинности стрелки Пирса.

X	Y	$X \downarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Сумма по модулю два, или антиэквивалентность, по определению $X \oplus Y = \overline{X \leftrightarrow Y}$.

Таблица истинности суммы по модулю два.

X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Заметим, что таблицы истинности логических операций содержат 2^n строк, где n — число простых высказываний.

4. Логические отношения

Иногда бывает желательно рассмотреть взаимоотношение двух высказываний. Наиболее интересное из таких отношений имеет место, когда из одного высказывания логически следует другое. Если из X следует Y, мы говорим также, что Y является следствием X или что Y логически выводимо из X. Исходя из анализа логических возможностей для пары высказываний X и Y, отношение следствия можно охарактеризовать таким образом: из X следует Y, если Y истинно всякий раз, когда истинно X, т. е. если Y истинно во всех логически возможных случаях, в которых X истинно.

В случаях составных высказываний, имеющих одни и те же компоненты, таблицы истинности дают удобный метод для проверки того, имеет ли место отношение следствия.

Следующая таблица иллюстрирует этот метод:

X	Y	$X \leftrightarrow Y$	$X \to Y$	$X \vee Y$
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Высказывание $X \leftrightarrow Y$ истинно в первом и четвертом случаях и в обоих этих случаях истинно также высказывание $X \to Y$. Мы видим, что из $X \leftrightarrow Y$ следует высказывание $X \to Y$. Сравнение двух последних столбцов показывает, что из высказывания $X \to Y$ не следует $X \vee Y$, из $X \vee Y$ не следует $X \to Y$.

При помощи таблиц истинности удобно осуществлять проверку эквивалентности двух составных высказываний, имеющих одни и те же компоненты. Для этого достаточно лишь посмотреть, одинаковы ли таблицы истинности у этих составных высказываний.

Из следующей таблицы истинности видно, что $X \to Y$ эквивалентно $\overline{X} \vee Y$.

X	Y	$X \to Y$	$\overline{X} \vee Y$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Два высказывания называются логически несовместимыми, если из истинности одного из них необходимо следует ложность другого. Другими словами, несовместимость высказываний X и Y означает, что они никогда не могут оказаться одновременно истинными. Если несколько составных высказываний построены из одних и тех же простых составляющих, то для проверки их совместимости нужно построить таблицы истинности для каждого из высказываний. Если среди всех строк найдется, по крайней мере, одна, в которой все составные высказывания истинны, то составные высказывания совместимы. В противном случае они оказываются несовместимыми.

5. Варианты импликации

Импликация двух высказываний отличается от эквивалентности, а также от дизъюнкции и конъюнкции тем, что она несимметрична. Так $X \vee Y$ эквивалентно $Y \vee X$; $X \wedge Y$ эквивалентно $Y \wedge X$; $X \leftrightarrow Y$ эквивалентно $Y \leftrightarrow X$, но $X \to Y$ не эквивалентно $Y \to X$. Высказывание $Y \to X$ называется **конверсией** высказывания $X \to Y$. Многие из наиболее распространенных ошибок в рассуждениях происходят от смешивания какого-либо высказывания с его конверсией. Интересно поэтому рассмотреть те импликации, которые могут быть образованы из высказываний X и Y

В таблице истинности представлены четыре импликации и их названия.

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	Импликация $X \to Y$	Конверсия импликации $Y \to X$	Конверсия контрапозиции $\overline{X} \to \overline{Y}$	Контрапозиция $\overline{Y} \to \overline{X}$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Из таблицы видно, что $X \to Y$ эквивалентно $\overline{Y} \to \overline{X}$. Последнее называется контрапозицией первого. Контрапозиция является удобной формой импликации во многих рассуждениях. Аналогично, высказывание $\overline{X} \to \overline{Y}$ представляет собой конверсию контрапозиции. Так как контрапозиция эквивалентна $\overline{X} \to \overline{Y}$, то конверсия этой контрапозиции эквивалентна конверсии этой импликации.

С импликацией связано постоянное упоминание математиками «необходимое условие» и «достаточное условие».

X является достаточным условием для Y	Если имеет место X, то Y также будет иметь место	Импликация $X \to Y$
X является необходимым условием для Y	Если имеет место Y, то X также будет иметь место	Конверсия достаточного условия $Y \to X$
X является необходимым и достаточным условием для Y	X имеет место, если и только если имеет место Y	Двойная импликация $X \leftrightarrow Y$ эквивалентность

6. Основные законы, определяющие свойства введенных логических операций

1) Идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции:

$$X \vee X \leftrightarrow X, \quad X \wedge X \leftrightarrow X.$$

2) Коммутативность дизъюнкции и конъюнкции:

$$X \vee Y \leftrightarrow Y \vee X, \quad X \wedge Y \leftrightarrow Y \wedge X.$$

3) Ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции:

$$X \vee (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \vee Z, \quad X \wedge (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \wedge Z.$$

4) Дистрибутивность операций дизъюнкции и конъюнкции относительно друг друга:

$$X \vee (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z), \quad X \wedge (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z).$$

5) Двойное отрицание:

$$X \leftrightarrow \overline{\overline{X}}.$$

6) Закон де Моргана:

$$\overline{X} \vee \overline{Y} \leftrightarrow \overline{X \wedge Y}, \quad \overline{X} \wedge \overline{Y} \leftrightarrow \overline{X \vee Y}.$$

7) Склеивание:

$$(X \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}) \leftrightarrow X, \quad (X \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Y}) \leftrightarrow X.$$

8) Поглощение:

$$X \vee (X \wedge Y) \leftrightarrow X, \quad X \wedge (X \vee Y) \leftrightarrow X.$$

9) Действие с логическими константами 0 и 1:

$$X \vee 0 \leftrightarrow X, \quad X \wedge 0 \leftrightarrow 0, \quad X \vee 1 \leftrightarrow 1, \quad X \wedge 1 \leftrightarrow X, \quad X \wedge \overline{X} \leftrightarrow 0.$$

10) Закон исключения третьего:

$$X \vee \overline{X} \leftrightarrow 1.$$

11) Тождество:

$$X \leftrightarrow X.$$

12) Отрицание противоречия:

$$\overline{\overline{X} \wedge X} \leftrightarrow 1.$$

13) Контрапозиция:

$$(X \to Y) \leftrightarrow (\overline{Y} \to \overline{X}).$$

14) Цепное заключение:

$$((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \leftrightarrow (X \to Z).$$

15) Противоположность:

$$(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (\overline{X} \leftrightarrow \overline{Y}).$$

16) Модус поненс (modus ponens):

$$(X \wedge (X \to Y)) \to Y \leftrightarrow 1.$$

Сформулированные законы легко проверить с помощью таблицы истинности.

Заметим, что при исследовании различных высказываний на эквивалентность (равносильность) логическую связку $\leftrightarrow$ можно заменить обычным знаком равенства $=$.

Первое практическое занятие по теме «Логические операции»

Задача 1. Составьте таблицу истинности формулы: $X \oplus Y \to \overline{Z} \vee X \mid \overline{Y} \wedge \overline{X}$.
Решение. Расставим скобки: $(X \oplus Y) \to \left(\overline{Z} \vee (X \mid (\overline{Y} \wedge \overline{X}))\right)$.

X	Y	Z	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{Z}$	$X \oplus Y$	$\overline{Y} \wedge \overline{X}$	$X \mid (\overline{Y} \wedge \overline{X})$	$\overline{Z} \vee (X \mid (\overline{Y} \wedge \overline{X}))$	$(X \oplus Y) \to (X \mid (\overline{Y} \wedge \overline{X}))$
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1

Задача 2. Докажите тождественную истинность формулы $\overline{X} \to (X \to Y)$.
Решение. Составим таблицу истинности:

X	Y	$\overline{X}$	$X \to Y$	$\overline{X} \to (X \to Y)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Последний столбец состоит из 1, следовательно, доказана тождественная истинность формулы.

Задача 3. Докажите эквивалентность $X \wedge (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.
Решение. Пусть $\varphi_1 = X \wedge (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$. Составим таблицу истинности:

X	Y	Z	$X \vee Z$	$Y \vee Z$	$X \wedge (X \vee Z)$	$X \wedge (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Пусть $\varphi_2 = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.

X	Y	Z	$X \wedge Y$	$X \wedge Z$	$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Заметим, что таблицы истинности для φ_1 и φ_2 совпадают, следовательно эквивалентность доказана.

Задача 4. Для каждого из следующих высказываний: 1) найдите символическую форму; 2) постройте таблицу истинности. Воспользуйтесь буквенными обозначениями: X для «Джо умен»; Y для «Джим глуп»; Z для «Джо получит приз».

(a) Если Джо умен, а Джим глуп, то Джо получит приз.

(b) Джо получит приз в том и только в том случае, если он умен или если Джим глуп.

(c) Если Джим глуп, а Джо не удастся получить приз, то Джо не умен.

Решение. **(a)** $(X \wedge Y) \to Z$; **(b)** $Z \leftrightarrow (X \vee Y)$; **(c)** $(Y \wedge \overline{Z}) \to \overline{X}$.

X	Y	Z	$\overline{X}$	$\overline{Z}$	$X \wedge Y$	$(X \wedge Y) \to Z$	$X \vee Y$	$Z \leftrightarrow (X \vee Y)$	$Y \wedge \overline{Z}$	$(Y \wedge \overline{Z}) \to \overline{X}$
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
						(a)		(b)		(c)

Задача 5. Таблица истинности высказывания, составленного из двух простых высказываний, состоит из четырех строк; а таблица истинности высказывания, составленного из трех простых высказываний, — из восьми строк. Сколько строк должна иметь таблица истинности высказывания, составленного из четырех простых высказываний? Сколько — из пяти? Сколько — из n? Укажите способ систематической записи таблиц истинности для произвольного n?

Указание. Для систематической записи таблиц истинности для произвольного n можно применить метод «последовательного половинного деления столбцов» — столбец первой переменной делят пополам и заполняют верхнюю половину нулями, а нижнюю половину — единицами, затем каждую половину второго столбца делят пополам и опять заполняют полученные половины нулями и единицами и т. д.

Задача 6. Доказать равносильность, используя основные законы логических операций: $\overline{(X \wedge \overline{Y}) \vee (Y \wedge \overline{Z})} = (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$.

Решение.

1. Используя законы де Моргана $\overline{X} \vee \overline{Y} \leftrightarrow \overline{X \wedge Y}$ и $\overline{X} \wedge \overline{Y} \leftrightarrow \overline{X \vee Y}$, получим:

$$\overline{(X \wedge \overline{Y}) \vee (Y \wedge \overline{Z})} = \overline{(X \wedge \overline{Y})} \wedge \overline{(Y \wedge \overline{Z})} = (\overline{X} \vee \overline{\overline{Y}}) \wedge (\overline{Y} \vee \overline{\overline{Z}}).$$

2. Используя закон двойного отрицания $X \leftrightarrow \overline{\overline{X}}$, получаем:

$$(\overline{X} \vee \overline{\overline{Y}}) \wedge (\overline{Y} \vee \overline{\overline{Z}}) = (\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee Z).$$

3. Применяя дистрибутивный закон $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z) = X \vee (Y \wedge Z)$, получаем

$$(\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee Z) = ((\overline{X} \vee Y) \wedge \overline{Y}) \vee ((\overline{X} \vee Y) \wedge Z) =$$
$$= ((\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (Y \wedge \overline{Y})) \vee ((\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)).$$

4. Ассоциативность дизъюнкции: $X \vee (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \vee Z$ позволяет упростить последнее выражение:

$$((\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (Y \wedge \overline{Y})) \vee ((\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)) = (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (Y \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \wedge Z).$$

5. Учитывая законы, включающие тождественно ложные высказывания, окончательно получаем:

$$(\overline{X} \wedge Y) \vee (Y \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) = (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \wedge Z).$$

Задача 7. С помощью таблиц истинности проверить, являются ли эквивалентными высказывания: $f_1 = X \wedge (Y \to Z)$ и $f_2 = (\overline{X} \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Z})$.

Решение.

X	Y	Z	$\overline{X}$	$Y \to Z$	f_1	$\overline{X} \wedge Y$	$X \wedge \overline{Z}$	f_2
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	1

Так как значения для высказываний f_1 и f_2 в таблице истинности не совпали, то они не эквивалентны.

Задача 8. Определите для каждого из следующих высказываний, будет ли оно логически истинным, противоречивым; ни тем, ни другим.

(а) $X \leftrightarrow X$; **(б)** $X \leftrightarrow \overline{X}$; **(в)** $(X \vee Y) \leftrightarrow (X \wedge Y)$; **(г)** $(X \to \overline{Y}) \to (Y \to \overline{X})$;
(д) $(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \wedge \overline{(X \to Z)}$; **(е)** $(X \to Y) \to X$; **(ж)** $((X \to Y) \to X) \to X$.

Решение.

X	Y	$X \leftrightarrow X$	$\overline{X}$	$X \leftrightarrow \overline{X}$	$X \vee Y$	$X \wedge Y$	$(X \vee Y) \leftrightarrow (X \wedge Y)$
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1
		(а)		**(б)**			**(в)**

Вывод: **(а)** — логически истинное; **(б)** — противоречивое; **(в)** — ни то, ни другое.

X	Y	$\overline{Y}$	$X \to \overline{Y}$	$Y \to \overline{X}$	$(X \to \overline{Y}) \to (Y \to \overline{X})$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
					(г)

(г) — логически истинное;

X	Y	Z	$X \to Y$	$Y \to Z$	$(X \to Y) \wedge (Y \to Z)$	$X \to Z$	$\overline{X \to Z}$	$(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \wedge \overline{(X \to Z)}$
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0
								(д)

(д) — противоречиво;

X	Y	$X \to Y$	$(X \to Y) \to X$	$((X \to Y) \to X) \to X$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1
			(е)	**(ж)**

(е) — ни то, ни другое; **(ж)** — логически истинно.

Задача 9. Покажите, что высказывание $(X \leftrightarrow Y) \to (X \to Y)$ — логически истинно, а $(X \leftrightarrow Y) \to (X \vee Y)$ — нет.

Задача 10. Постройте таблицы истинности следующих составных высказываний: **(а)** $X \wedge Y$; **(б)** $X \to \overline{Y}$; **(в)** $\overline{X} \vee \overline{Y}$; **(г)** $\overline{X} \vee Y$; **(д)** $X \wedge \overline{Y}$. Для каких пар имеет место отношение следствия или эквивалентности?

Ответ: **(б)** эквивалентно **(в)**; из **(а)** следует **(г)**; из **(д)** следует **(б)**, **(в)**.

Задача 11. Постройте таблицы истинности следующих составных высказываний и расположите их в таком порядке, чтобы из каждого высказывания следовали все, стоящие после него: **(а)** $\overline{X} \leftrightarrow Y$; **(б)** $X \to Y$; **(в)** $X \to (Y \to X)$; **(г)** $X \vee Y$; **(д)** $\overline{X} \wedge Y$.
Ответ: **(в); (д); (а); (г); (б).**

Задача 12. Постройте составные высказывания, эквивалентные **а)** $X \leftrightarrow Y$; **б)** $X \vee Y$, используя только связки отрицания и конъюнкции.

Задача 13. Если X и Y логически истинны, а Z — логически ложно, то что можно сказать о высказывании $(X \vee \overline{Y}) \wedge \overline{Z}$?
Ответ: логически истинно.

Задача 14. Докажите, что конъюнкция импликации и ее конверсия эквивалентны двойной импликации, т. е. $(X \to Y) \wedge (Y \to X) \leftrightarrow (X \leftrightarrow Y)$.

Задача 15. Чему эквивалентна конъюнкция контрапозиции и ее конверсии?

Задача 16. Докажите, что отрицание высказывания : «X есть необходимое и достаточное условие для Y» эквивалентно высказыванию: «X есть необходимое и достаточное условие для $\overline{Y}$».

Задача 17. Докажите, что контрапозиция эквивалентна первоначальной импликации.

Задача 18. Пусть X означает: «Я сдам этот экзамен»; а Y: «Я буду регулярно выполнять домашние задания». Запишите в символической форме следующие высказывания:

(а) «Я сдам этот экзамен только в том случае, если буду регулярно выполнять домашние задания».

(б) «Регулярное выполнение домашних заданий является необходимым условием для того, что я сдам этот экзамен».

(в) «Сдача этого экзамена является достаточным условием того, что я регулярно выполнял домашние задания».

(г) «Я сдам этот экзамен в том и только в том случае, если я буду регулярно выполнять домашние задания».

(д) «Регулярное выполнение домашних заданий есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы я сдал этот экзамен».

Выясните, какому из перечисленных высказываний соответствуют следующие символические формы: $X \to Y$; $Y \leftrightarrow X$; $X \leftrightarrow Y$; $Y \to X$.

Задача 19. Докажите равносильность $\overline{X \to Y} = X \wedge \overline{Y}$ с помощью формул алгебры высказываний.
Решение. Используя формулу $X \to Y = \overline{X} \vee Y$, запишем: $\overline{X \to Y} = \overline{\overline{X} \vee Y}$, тогда $\overline{\overline{X} \vee Y} = \overline{\overline{X}} \wedge \overline{Y}$ по закону де Моргана, т. е. $\overline{X \to Y} = X \wedge \overline{Y}$, т. к. по закону двойного отрицания $\overline{\overline{X}} = X$, что и требовалось доказать.

Полученная формула дает правило построения отрицания для импликаци часто применяемое в математических рассуждениях: $\overline{X \to Y} = X \wedge \overline{Y}$.

Задача 20. Преобразуйте формулу $(X \to (Y \to Z)) \leftrightarrow \overline{Y \to X}$ к виду, не содерж щему импликацию и эквивалентность.

Решение. Запишем цепочку преобразований:

$$(X \to (Y \to Z)) \leftrightarrow \overline{Y \to X} = \left(X \to (\overline{Y} \vee Z)\right) \leftrightarrow Y \wedge \overline{X} = \overline{X} \vee (\overline{Y} \vee Z) \leftrightarrow (Y \wedge \overline{X}) =$$

$$= ((\overline{X} \vee (\overline{Y} \vee Z)) \wedge (Y \wedge \overline{X})) \vee \left(\overline{\overline{X} \vee (\overline{Y} \vee Z)} \wedge \overline{(Y \wedge \overline{X})}\right.$$

Задача 21. Проверьте, будут ли эквивалентны следующие формулы:
а) $X \to (Y \oplus Z)$ и $(X \to Y) \oplus (X \to Z)$; б) $X \mid (Y \to Z)$ и $(X \mid Y) \to (X \mid Z)$;
в) $X \downarrow (Y \leftrightarrow Z)$ и $\overline{(X \downarrow Y) \leftrightarrow (X \downarrow Z)}$.

Решение. Составим таблицы истинности:

(а)

X	Y	Z	$Y \oplus Z$	$X \to (Y \oplus Z)$	$X \to Y$	$X \to Z$	$(X \to Y) \oplus (X \to Z)$
0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0

Формулы не эквивалентны.

(б)

X	Y	Z	$Y \to Z$	$X \mid (Y \to Z)$	$X \mid Y$	$X \mid Z$	$(X \mid Y) \to (X \mid Z)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1

Формулы не эквивалентны.

(в)

X	Y	Z	$Y \leftrightarrow Z$	$X \downarrow (Y \leftrightarrow Z)$	$X \downarrow Y$	$X \downarrow Z$	$(X \downarrow Y) \leftrightarrow (X \downarrow Z)$
0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0

Формулы эквивалентны.

Задача 22. Составьте таблицы истинности для высказываний:

а) $X \mid X$; б) $(X \mid Y) \mid (X \mid Y)$,

и покажите, что любая таблица истинности может быть реализована посредством составного высказывания, в котором используется единственная связка: штрих Шеффера.

Задача 23. Постройте таблицы истинности для высказываний:

а) $X \downarrow X$; б) $(X \downarrow Y) \downarrow (X \downarrow Y)$.

Какие другие составные высказывания имеют те же таблицы истинности? Покажите, что любая таблица истинности может быть реализована посредством составного высказывания, в котором используется единственная связка: стрелка Пирса.

Задача 24. Докажите, что импликация $X \to Y$ эквивалентна $((X \wedge Y) \oplus X) \oplus 1$.

Решение. Доказательство проведем с помощью таблицы истинности.

X	Y	$X \to Y$	$X \wedge Y$	$(X \wedge Y) \oplus X$	1	$((X \wedge Y) \oplus X) \oplus 1$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1

Задача 25. Докажите эквивалентность формул:

$$f_1 = (X \wedge Y \vee (\overline{X} \to Y \wedge Z)) \leftrightarrow (\overline{X} \to \overline{Y}) \to Z;$$

$$f_2 = (X \to Y) \oplus (Y \oplus Z).$$