

**Материалы, устанавливающие содержание и порядок проведения
текущих и промежуточных аттестаций по дисциплине
«Математический анализ»**

1 СЕМЕСТР

В 1 семестре предусмотрены три контрольные работы по темам «Пределы последовательностей и функций», «Производная и ее приложения», «Неопределенные и определенные интегралы». Контрольные работы выполняются на практических занятиях, на каждую контрольную работу отводится 90 минут. По окончании семестра студент получает зачет только в том случае, если все три контрольные работы написаны на положительные оценки. Критерии выставления положительных оценок сформулированы для каждой контрольной работы ниже.

Контрольная работа теме: «Пределы последовательностей и функций».

Контрольная работа состоит из двух частей: теоретической и практической. Теоретическая часть содержит один вопрос по теории из списка вопросов для подготовки к контрольной работе. Практическая часть включает 7 заданий (см. образец варианта контрольной работы ниже). По результатам выставляются две оценки по пятибалльной шкале: одна оценка за теоретическую часть, другая – за практическую часть. В теоретической части студент должен продемонстрировать знания основных определений, формул и формулировок теорем. За практическую часть выставляется оценка «3», если правильно решены любые четыре задания, оценка «4», если правильно решены любые шесть заданий, оценка «5», если правильно решены все семь заданий.

Положительными считаются оценки «3», «4», «5».

Если студенту не удалось получить положительные оценки, то контрольную работу необходимо переписать. Но сначала нужно еще раз проработать вопросы для подготовки к контрольной работе, обязательно сделать работу над ошибками по практической части и сдать её преподавателю на проверку (если что-то не получается, имеет смысл прийти на консультацию). После того, как верно выполнена работа над ошибками, преподаватель назначает студенту время (как правило, на консультации) для переписывания контрольной работы. Критерии выставления оценок остаются прежними.

Вопросы для подготовки к контрольной работе:

1. Предел последовательности. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.
2. Предел функции.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие и связь между ними. Свойства бесконечно малых.
4. Основные теоремы о пределах.
5. Первый и второй замечательные пределы.
6. Сравнение бесконечно малых величин. Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов.
7. Непрерывные функции. Арифметические действия над непрерывными функциями.
8. Основные свойства непрерывных на отрезке функций.

Образец варианта контрольной работы:

- 1) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x^2 + 9x - 145}{3x^2 - x - 70}$
- 2) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{8x^2 - 5x - 7}{9x^2 + 6x + 8}$
- 3) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{49 - x^2}{5 - \sqrt{81 - 8x}}$
- 4) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 7x + 2}{7 - 4x - 2x^2}$
- 5) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 7x)}{\cos 2x - 1}$
- 6) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(3/x)}{3 + \sin 5x}$
- 7) Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 5}{4 + 4x} \right)^{2x}$

Контрольная работа по теме: «Производная и ее приложения».

Контрольная работа состоит из двух частей: теоретической и практической. Теоретическая часть содержит один вопрос по теории из списка вопросов для подготовки к контрольной работе. Практическая часть включает 6 заданий (см. образец варианта контрольной работы ниже). По результатам выставляются две оценки по пятибалльной шкале: одна оценка за теоретическую часть, другая – за практическую часть. В теоретической части студент должен продемонстрировать знания основных определений, формул и формулировок теорем. За практическую часть выставляется оценка «3», если правильно решены любые четыре задания, оценка «4», если правильно решены любые пять заданий, оценка «5», если правильно решены все шесть заданий.

Положительными считаются оценки «3», «4», «5».

Если студенту не удалось получить положительные оценки, то контрольную работу необходимо переписать. Но сначала нужно еще раз проработать вопросы для подготовки к контрольной работе, обязательно сделать работу над ошибками по практической части и сдать её преподавателю на проверку (если что-то не получается, имеет смысл прийти на консультацию). После того, как верно выполнена работа над ошибками, преподаватель назначает студенту время (как правило, на консультации) для переписывания контрольной работы. Критерии выставления оценок остаются прежними.

Вопросы для подготовки к контрольной работе:

1. Производная функции, ее геометрический и механический смысл. Уравнения касательной и нормали.
2. Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции.
3. Производные постоянной, суммы, произведения и частного.
4. Производные тригонометрических функций.
5. Производные степенной, показательной и логарифмической функций.
6. Производная сложной функции.
7. Обратная функция и ее производная. Производные обратных тригонометрических функций.
8. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала.
9. Теорема Ферма.
10. Теорема Ролля.
11. Теорема Лагранжа.
12. Теорема Коши.
13. Раскрытие неопределенностей и правило Лопиталя.

14. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Разложение функций $y = \sin x$, $y = e^x$ по формуле Маклорена.
15. Условия монотонности функции.
16. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума.
17. Достаточное условие экстремума (с использованием первой производной).
18. Достаточное условие экстремума (с использованием второй производной).
19. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
20. Исследование направления выпуклости кривой. Точки перегиба.
21. Асимптоты кривой.

Образец варианта контрольной работы:

- 1) Составить уравнение касательной к кривой $y = \frac{x}{x^2+1}$ в точке $x_0 = -2$.
- 2) Показать, что функция $y = \frac{2\sin x}{x} + \cos x$ удовлетворяет уравнению $x(\sin x)y' + (\sin x - x \cos x)y = \sin x \cos x - x$, и найти значение $y'(\pi)$.
- 3) Найти значение дифференциала функции $y(x)$ в точке $x_0 = 0$, если $y = \ln(e^x + e^{2x} - 1) + \arcsin \frac{e^{-x}}{2}$.
- 4) Исследовать на экстремум функцию: $y = 3 \ln \frac{x}{x-3} - 1$.
- 5) Найти на отрезке $[-3, 3]$ наибольшее и наименьшее значения функции: $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$.
- 6) Для функции $y = (x-1)^2(x-3)^2$ провести полное исследование и построить график.

Контрольная работа по теме: «Неопределенные и определенные интегралы»

Контрольная работа состоит из двух частей: теоретической и практической. Теоретическая часть содержит один вопрос по теории из списка вопросов для подготовки к контрольной работе. Практическая часть включает 6 заданий (см. образец варианта контрольной работы ниже). По результатам выставляются две оценки по пятибалльной шкале: одна оценка за теоретическую часть, другая – за практическую часть. В теоретической части студент должен продемонстрировать знания основных определений, формул и формулировок теорем. За практическую часть выставляется оценка «3», если правильно решены любые четыре задания, оценка «4», если правильно решены любые пять заданий, оценка «5», если правильно решены все шесть заданий.

Положительными считаются оценки «3», «4», «5».

Если студенту не удалось получить положительные оценки, то контрольную работу необходимо переписать. Но сначала нужно еще раз проработать вопросы для подготовки к контрольной работе, обязательно сделать работу над ошибками по практической части и сдать её преподавателю на проверку (если что-то не получается, имеет смысл прийти на консультацию). После того, как верно выполнена работа над ошибками, преподаватель назначает студенту время (как правило, на консультации) для переписывания контрольной работы. Критерии выставления оценок остаются прежними.

Вопросы для подготовки к контрольной работе:

1. Первообразная. Теорема о первообразных.
2. Неопределенный интеграл и его свойства.
3. Замена переменной в неопределенном интеграле.
4. Формула интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

5. Интегрирование выражений вида $\frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}$, $\frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$.
6. Простейшие рациональные дроби и их интегрирование.
7. Интегрирование рациональных дробей.
8. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Универсальная подстановка.
9. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.
10. Определенный интеграл: определение и геометрический смысл.
11. Свойства определенного интеграла.
12. Интеграл с переменным верхним пределом, его производная по верхнему пределу.
13. Формула Ньютона-Лейбница.
14. Замена переменной в определенном интеграле.
15. Несобственные интегралы.

Образец варианта контрольной работы:

Вычислить интегралы:

1. $\int (2 - 5x) \cos 4x dx$
2. $\int \frac{\sqrt[3]{2 + 3 \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$
3. $\int \cos^2 x \sin^5 x dx$
4. $\int \frac{2x - 7}{9 - 2x - x^2} dx$
5. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cos 3x dx$
6. $\int \left(8x^9 + 2\sqrt[6]{x^5} - \frac{4}{x^{10}} \right) dx$

2 СЕМЕСТР

Во 2 семестре предусмотрены три контрольные работы по темам «Функции нескольких переменных», «Двойные и тройные интегралы», «Ряды». Контрольные работы выполняются на практических занятиях, на каждую контрольную работу отводится 90 минут. Критерии выставления оценок сформулированы для каждой контрольной работы ниже. По окончании 2 семестра проводится экзамен.

Контрольная работа №1 по теме: «Функции нескольких переменных»

Контрольная работа №1 состоит из двух частей: теоретической и практической. Теоретическая часть содержит один вопрос по теории из списка вопросов для подготовки к контрольной работе №1. Практическая часть включает 5 заданий (см. образец варианта контрольной работы №1 ниже). По результатам выставляются две оценки по пятибалльной шкале: одна оценка за теоретическую часть, другая – за практическую часть. В теоретической части студент должен продемонстрировать знания основных определений, формул и формулировок теорем. За практическую часть выставляется оценка «1 балл», если правильно решена любая одна задача, оценка «2 балла», если правильно решены любые две задачи, оценка «3 балла», если правильно решены любые три задания, оценка «4 балла», если правильно решены любые четыре задания, оценка «5 баллов», если правильно решены все пять заданий.

При желании студента с целью повышения оценки контрольную работу №1 можно переписать один раз. Но сначала нужно еще раз проработать вопросы для подготовки к контрольной работе №1, обязательно сделать работу над ошибками по практической части и сдать её преподавателю на проверку (если что-то не получается, имеет смысл прийти на консультацию). После того, как верно выполнена работа над ошибками, преподаватель назначает студенту время (как правило, на консультации) для переписывания контрольной работы. Критерии выставления оценок остаются прежними.

Вопросы для подготовки к контрольной работе №1:

1. Понятие функции двух переменных. Предел функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных.
2. Частные производные функции двух переменных первого порядка: определение. Правила вычисления частных производных.
3. Полный дифференциал функции двух переменных. Обобщение на случай функции трех переменных.
4. Производные сложных функций.
5. Неявные функции. Производные неявных функций.
6. Частные производные второго порядка функции двух переменных.
7. Экстремум функции двух переменных: определения. Необходимое условие экстремума.
8. Экстремум функции двух переменных: определения. Достаточные условия экстремума.
9. Касательная плоскость к поверхности.
10. Производная по направлению.
11. Градиент, свойства градиента. Линии уровня.

Образец варианта контрольной работы №1:

1. Найти полный дифференциал функции $z = \arcsin \sqrt{1 - 2y^4x}$.
2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ от сложной функции $z = y^{3-5x}$,
 $x = \frac{1-v}{u^2}, y = \frac{1}{u\sqrt{v}}$.
3. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2y^2 + xyz + x^2z = 2y$ в точке $M(2; -1; z_0)$.
4. Исследовать функцию $z = x^3 - 2xy + y^2 + x - y + 4$ на экстремум.
5. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ от неявной функции $xe^{y-x} = \sqrt[4]{2x-5y} + 1$.

Контрольная работа №2 по теме: «Двойные и тройные интегралы»

Контрольная работа №2 состоит из двух частей: теоретической и практической. Теоретическая часть содержит один вопрос по теории из списка вопросов для подготовки к контрольной работе №2. Практическая часть включает 4 заданий (см. образец варианта кон-

трольной работы №2 ниже). По результатам выставляются две оценки по пятибалльной шкале: одна оценка за теоретическую часть, другая – за практическую часть. В теоретической части студент должен продемонстрировать знания основных определений, формул и формулировок теорем. За практическую часть выставляется оценка «1 балл», если хотя бы в одном задании правильно изображена область интегрирования и правильно расставлены пределы интегрирования, оценка «2 балла», если правильно решено любое одно задание, оценка «3 балла», если правильно решены любые два задания, оценка «4 балла», если правильно решены любые три задания, оценка «5 баллов», если правильно решены все четыре задания.

При желании студента с целью повышения оценки контрольную работу №2 можно переписать один раз. Но сначала нужно еще раз проработать вопросы для подготовки к контрольной работе №2, обязательно сделать работу над ошибками по практической части и сдать её преподавателю на проверку (если что-то не получается, имеет смысл прийти на консультацию). После того, как верно выполнена работа над ошибками, преподаватель назначает студенту время (как правило, на консультации) для переписывания контрольной работы. Критерии выставления оценок остаются прежними.

Вопросы для подготовки к контрольной работе №2:

1. Двойной интеграл: определение, теорема существования, геометрический смысл.
2. Свойства двойного интеграла.
3. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
4. Полярные координаты. Двойной интеграл в полярных координатах.
5. Приложения двойных интегралов.
6. Тройной интеграл. Определение, теорема существования, геометрический смысл.
7. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
8. Цилиндрические координаты. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
9. Приложения тройных интегралов.

Образец варианта контрольной работы №2:

1. Вычислить интеграл $\iint_D 2xy dx dy$, где $D: \{x = 0, y = -8, y = -x^3\}$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = -y^2, x = -9$.
3. Вычислить интеграл $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} z dx dy dz$, где $\Omega: \{x^2 + y^2 = z, z = 2\}$.
4. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0, x = 0, y = x, x + y - z = 2$.

Контрольная работа №3 по теме: «Ряды»

Контрольная работа №3 состоит из двух частей: теоретической и практической. Теоретическая часть содержит один вопрос по теории из списка вопросов для подготовки к контрольной работе №3. Практическая часть включает 5 заданий (см. образец варианта контрольной работы №3 ниже). По результатам выставляются две оценки по пятибалльной шкале: одна оценка за теоретическую часть, другая – за практическую часть. В теоретической части студент должен продемонстрировать знания основных определений, формул и формулировок теорем. За практическую часть выставляется

оценка «1 балл», если правильно решена любая одна задача,
оценка «2 балла», если правильно решены любые две задачи,
оценка «3 балла», если правильно решены любые три задания,
оценка «4 балла», если правильно решены любые четыре задания,
оценка «5 баллов», если правильно решены все пять заданий.

При желании студента с целью повышения оценки контрольную работу №3 можно переписать один раз. Но сначала нужно еще раз проработать вопросы для подготовки к контрольной работе №3, обязательно сделать работу над ошибками по практической части и сдать её преподавателю на проверку (если что-то не получается, имеет смысл прийти на консультацию). После того, как верно выполнена работа над ошибками, преподаватель назначает студенту время (как правило, на консультации) для переписывания контрольной работы. Критерии выставления оценок остаются прежними.

Вопросы для подготовки к контрольной работе №3:

1. Числовые ряды. Основные определения. Свойства сходящихся рядов. Необходимое условие сходимости ряда.
2. Интегральный признак сходимости ряда. Обобщенный гармонический ряд.
3. Признаки сравнения рядов.
4. Признак Даламбера. Радикальный признак.
5. Знакопередающие ряды. Признак Лейбница.
6. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
7. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал сходимости. Радиус сходимости.

Образец варианта контрольной работы №3:

1. Исследовать ряды на сходимость

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} tg^n \frac{\pi n}{3n+1}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt{n^2+10}}; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{4^n n!}.$$

2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{5n^3+2}$ на сходимость. Определить характер сходимости.

3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-4)^n}{n+2}.$

Экзамен по дисциплине

На экзамене студент получает экзаменационный билет, который содержит один теоретический вопрос и три задачи. Перед экзаменом следует повторить все вопросы для подготовки к контрольным работам №1, №2 и №3. Первая задача экзаменационного билета относится к теме «Функции нескольких переменных», вторая задача – к теме «Двойные и тройные интегралы», третья задача – к теме «Ряды». За работу на экзамене выставляется оценка «3», если правильно решены любые две задачи экзаменационного билета, оценка «4», если правильно решены все три задачи экзаменационного билета, оценка «5», если правильно решены все три задачи экзаменационного билета и при ответе на теоретический вопрос студент продемонстрировал знания основных определений, формул и формулировок теорем.

Образец экзаменационного билета

 МГУП	Экзаменационный билет № 1 Кафедра высшей математики Направление «Экономика» Дисциплина: <i>Математический анализ</i> (2 семестр)
1. Частные производные функции двух переменных первого порядка: определение. Правила вычисления частных производных. 2. Найти производную $\frac{dz}{dx}$ от сложной функции $z = 5^{2x} x^{-y}$, $y = \frac{x}{\sqrt[4]{1-x^2}}$. 3. Вычислить интеграл $\iint_D xy^2 dx dy$, где $D: \{xy = 1, y = x, y = -2\}$. 4. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$. Зав. кафедрой С.В. Успенский	

Порядок формирования оценок по дисциплине

По результатам написания всех трех контрольных работ выставляются средние оценки по теоретической части $T_{\text{средняя}}$ и по практической части $P_{\text{средняя}}$:

$$T_{\text{средняя}} = (T_1 + T_2 + T_3) : 3, \quad P_{\text{средняя}} = (P_1 + P_2 + P_3) : 3$$

где T_1, T_2, T_3 - оценки, полученные за теоретическую часть соответственно в контрольных работах №1, №2, №3, а P_1, P_2, P_3 - оценки, полученные за практическую часть соответственно в контрольных работах №1, №2, №3.

Общая оценка $O_{\text{общая}}$ за работу студента в течение семестра рассчитывается по формуле

$$O_{\text{общая}} = 0,4 \cdot T_{\text{средняя}} + 0,6 \cdot P_{\text{средняя}}.$$

Итоговая оценка $O_{\text{итоговая}}$ по дисциплине выставляется по следующей формуле

$$O_{\text{итоговая}} = 0,7 \cdot O_{\text{экзамен}} + 0,3 \cdot O_{\text{общая}},$$

где $O_{\text{экзамен}}$ - оценка за работу студента непосредственно на экзамене.

Способ округления оценок производится по правилам арифметики округления.