Министерство сельского хозяйства
Российской Федерации

Московский государственный университет
природообустройства

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ МГУП

Направление подготовки 080100 «Экономика»
Профиль «Экономика предприятий и организаций природопользования и водного хозяйства»

МОСКВА 2013

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИРОДООБУСТРОЙСТВА

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ МГУП

Направление подготовки 080100 «Экономика»
Профиль «Экономика предприятий и организаций природопользования и водного хозяйства»

МОСКВА 2013

Составители: Васильева Е.Н., Денисова О.И.

ББК 22.11
В92
УДК 517.521

Линейная алгебра. Методические указания и контрольные задания для студентов МГУП. / Московский государственный университет природообустройства. Составители: Васильева Е.Н., Денисова О.И. М., 2012, с. 25.

Методические указания предназначены для студентов-заочников МГУП с целью повышения эффективности самостоятельной работы и выполнения ими контрольных заданий по курсу “Линейная алгебра”.

Рецензенты:
Ковалев В.П. (зав. кафедрой физики),
Снежко В.Л. (зав. кафедрой вычислительной техники и прикладной атематики)

© Московский государственный университет природообустройства, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....….5

Тема 1.Операции над матрицами…….....5

Тема 2.Метод Гаусса…….....8

Тема 3. Системы n линейных уравнений с n переменными .....…11

Тема 4. Элементы векторной алгебры.....…16

Тема 5. Аналитическая геометрия на плоскости.....…19

Тема 6. Аналитическая геометрия в пространстве.....22

ВВЕДЕНИЕ

Уважаемые студенты. В этой книжке Вы найдете контрольные задания и методические указания для их выполнения и для подготовки к экзамену по линейной алгебре.

Для изучения материала Вам рекомендуется следующая литература (в последующем тексте будут ссылки именно на указанные пособия).

Список литературы:

[1] Н.Ш. Кремер, Высшая математика для экономистов. Практикум, М.: ЮНИТИ, 2007. — 479 с.

Тема 1. Операции над матрицами

Литература [1], глава 1, §§ 1.1, 1.2.

Пример. Найти значение матричного многочлена $f(A)$.

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 5x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Вместо x подставляем в функцию $f(x)$ матрицу A, вместо числа 3 используем матрицу $3E$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$-единичная

матрица 2-го порядка, что и A.

$$f(A) = -A^3 + 2A^2 - 5A + 3E$$

Найдем произведение матриц

Умножение матрицы А на матрицу В определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матрицы $\underset{mxk}{A} \cdot \underset{kxn}{B}$ называется такая матрица С, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы j-го столбца матрицы В.

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj}, \quad i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 4 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 32 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число-каждый элемент матрицы умножается на это число.

$$2A^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}; \quad -A^3 = \begin{pmatrix} -24 & -32 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$5A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad 3E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Сложение (вычитание) матриц одинакового размера осуществляется поэлементно.

Теперь найдем $f(A) = -A^3 + 2A^2 - 5A + 3E =$

$$= \begin{pmatrix} -24 & -32 \\ -8 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -36 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -15 & -36 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$

Задачи 101-110. Найти значение матричного многочлена $f(A)$.

101) $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

102) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

103) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

104) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

105) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

106) $f(x) = 3x^3 + x^2 - x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

107) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

108) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

109) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

110) $f(x) = -2x^3 + x^2 - x + 4, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Тема 2. Метод Гаусса

Литература [1],глава 1, §§ 1.3, 1.6; глава 2, §§ 2.1, 2.3, 2.4.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решения:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -2; \\ 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -2; \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -4. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы. Необходимо на первом шаге, чтобы $a_{11} \neq 0$, но удобнее для вычислений, чтобы $a_{11} = 1$. Поэтому поменяем местами первую и вторую строки, чтобы a_{11} стал равным 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -2 \\ -1 & 4 & 1 & -5 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 5 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -2 \\ -1 & 4 & 1 & -5 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-2)\times(1) \\ \hookleftarrow \quad \downarrow \\ \quad\quad \downarrow \\ \quad\quad \hookleftarrow \end{array} \sim$$

Шаг 1. Умножим элементы первой строки на -2 и 1 и прибавим их соответственно к элементам второй и четвертой строк, чтобы под элементом a_{11} в первом столбце образовалась «ступенька» из нулей.

Для проведения второго шага необходимо, чтобы $a_{22} \neq 0$. Для удобства поменяем вторую и третью строки.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & -9 & -6 & 9 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 9 & 6 & -9 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -9 & -6 & 9 & 6 \\ 0 & 9 & 6 & -9 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times 3\times(-3) \\ \hookleftarrow \quad \downarrow \\ \quad\quad \hookleftarrow \end{array} \sim$$

Шаг 2. Элементы второй строки умножаем на 3 и -3 и прибавляем соответственно к элементам третьей и четвертой строк, тогда третья и четвертая строки обнулятся, и мы отбросим их. Разделим вторую строку на 2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) : 2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 5 & -4 & -2 \\ 0 & 1,5 & 1 & -1,5 & -1 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы системы равны 2.

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы (теорема *Кронекера - Капелли*).

Следовательно, система совместна.

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, то система имеет единственное решение.
2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, то система неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Две основные (базисные) переменные, так как $r(A) = 2$ и две неосновные (свободные) переменные. Берем за основные x_1, x_3. Остальные, неосновные переменные x_2, x_4 (с их коэффициентами) переносим в правую часть уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 = -2 - 5x_2 + 4x_4 \\ x_3 = -1 - 1,5x_2 + 1,5x_4 \end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2,5x_2 - 3,5x_4 + 3 \\ x_3 = -1 - 1,5x_2 + 1,5x_4 \end{cases}.$$

Задавая неосновным переменным произвольные значения $x_2 = c_1$, $x_4 = c_2$, найдем бесконечное множество решений системы: $(2,5c_1 - 3,5c_2 + 3; c_1; -1,5c_1 + 1,5c_2 - 1; c_2)$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Частное решение получаем из общего, подставляя в c_1, c_2 некоторые значения, например, $c_1 = 1, c_2 = 1$. Получаем частное решение (2;1;-1;1).

Сделаем проверку, подставив в систему частное решение $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 1$.

$$\begin{cases} 4+1-4+1=2; \\ 2+5-5-4=-2; \\ 3-2-3=-2; \\ -2+4-1-5=-4. \end{cases}$$ Верное равенство.

Ответ. Общее решение

$(2,5c_1-3,5c_2+3;c_1;-1,5c_1+1,5c_2-1;c_2)$, где $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

Частное решение (2;1;-1;1).

Задачи 111-120. Решить систему уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решения:

111)

$$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+3x_4=5; \\ 4x_1+x_2+x_3+2x_4=13; \\ 7x_1+4x_2+3x_3+x_4=21; \\ 2x_1+5x_2+3x_3-4x_4=3. \end{cases}$$

112)

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=-3; \\ -x_1-3x_2+2x_4=-3; \\ x_1-4x_3+x_4=0; \\ x_1-x_2+3x_3+3x_4=6. \end{cases}$$

113)

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2+5x_3-2x_4=-1; \\ -4x_1+13x_3+x_4=-10; \\ -2x_1+3x_2-3x_3-4x_4=6; \\ 2x_1-4x_2+3x_3+5x_4=-8. \end{cases}$$

114)

$$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3-4x_4=-2; \\ -5x_1+8x_2-4x_3+12x_4=-4; \\ 4x_1-7x_2+5x_3-12x_4=-1; \\ -2x_1+3x_2-x_3+4x_4=-3. \end{cases}$$

115)

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=8; \\ 2x_1-x_2-4x_3+3x_4=1; \\ 4x_1-7x_2-18x_3+11x_4=-13; \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=9. \end{cases}$$

116)

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-3x_4=4, \\ 2x_1+5x_2-x_3-4x_4=9, \\ x_1+3x_2+x_3-x_4=5. \end{cases}$$

117)

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3-2x_4=2; \\ -3x_1-7x_2-8x_3+2x_4=-4; \\ 2x_1-x_2+3x_3=4; \\ 2x_1+4x_2+4x_3=3. \end{cases}$$

118)

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=1; \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4=-1; \\ 2x_1-2x_2+3x_3=5; \\ 2x_1+3x_2-2x_3+x_4=-3. \end{cases}$$

119)

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_2-x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+2x_2+3x_4=3. \end{cases}$$

120)

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2, \\ 2x_1+2x_2-x_3+2x_4=-2, \\ x_1-x_2-x_4=2. \end{cases}$$

Тема 3. Системы n линейных уравнений с n переменными

Литература [1],глава 1, §§ 1.3, 1.5; глава 2, §§ 2.1, 2.2.

Пример. Решить систему уравнений тремя способами (по теореме Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы):

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=22 \\ 3x_1+2x_2+x_3=47 \\ x_1+3x_2-x_3=18 \end{cases}.$$

Решение. <u>1-й способ (по теореме Крамера)</u>: Составим определитель Δ матрицы A системы: $\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

Вычислим этот определитель, раскладывая его по первой строке с помощью формулы: $\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$. В этой формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ - алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A, где M_{ij} - миноры элементов a_{ij} матрицы A.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы 3-го порядка A называется определитель матрицы 2-го порядка, получаемой из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Получаем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-2-3) - 1\cdot(-3-1) + 1\cdot(9-2) = -5+4+7 = 6 \neq 0.$$

Для вычисления определителей второго порядка мы воспользовались здесь формулой: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Далее составим и вычислим аналогично определители Δ_j матриц, получаемых из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов ($j = 1,2,3$):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 22 & 1 & 1 \\ 47 & 2 & 1 \\ 18 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 22\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 47 & 1 \\ 18 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 47 & 2 \\ 18 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 22\cdot(-2-3) - 1\cdot(-47-18) + 1\cdot(141-36) = -110+65+105 = 60,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 22 & 1 \\ 3 & 47 & 1 \\ 1 & 18 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 47 & 1 \\ 18 & -1 \end{vmatrix} - 22\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 47 \\ 1 & 18 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-47-18) - 22\cdot(-3-1) + 1\cdot(54-47) = -65+88+7 = 30,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 22 \\ 3 & 2 & 47 \\ 1 & 3 & 18 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 47 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 47 \\ 1 & 18 \end{vmatrix} + 22\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(36-141) - 1\cdot(54-47) + 22\cdot(9-2) = -105-7+154 = 42.$$

Применяем формулы Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{60}{6} = 10\,,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{30}{6} = 5\,,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{42}{6} = 7\,.$$

Ответ: $x_1 = 10, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 7$.

<u>2-й способ (метод Гаусса)</u>: Составим расширенную матрицу системы: $A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 3 & 2 & 1 & 47 \\ 1 & 3 & -1 & 18 \end{array}\right)$. С помощью элементарных преобразований приведем матрицу A_1 к ступенчатому виду. Для этого сначала умножим первую строчку на -3 и прибавим ко второй строчке, затем умножим первую строчку на -1 и прибавим к третьей строчке:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 3 & 2 & 1 & 47 \\ 1 & 3 & -1 & 18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-3) \times(-1) \\ \hookleftarrow \qquad \\ \qquad \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & -1 & -2 & -19 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Далее умножим вторую строчку на 2 и прибавим к третьей строчке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & -1 & -2 & -19 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times 2 \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & -1 & -2 & -19 \\ 0 & 0 & -6 & -42 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы системы и равен 3, следовательно, наша система совместна. Число переменных n также равно 3, значит, система имеет единственное решение. Для того, чтобы его найти, составим равносильную систему уравнений, которая соответствует полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 22 \\ -x_2 - 2x_3 = -19 \\ \quad -6x_3 = -42 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения находим $x_3 = 7$. Затем подставляя во второе уравнение системы $x_3 = 7$, получаем $x_2 = 5$. И, наконец, зная x_2 и x_3, из первого уравнения системы находим $x_1 = 10$.

Ответ: $x_1 = 10, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 7$.

<u>3-й способ (с помощью обратной матрицы)</u>. Запишем систему уравнений в матричном виде: $A \cdot X = B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ - матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец переменных, $B = \begin{pmatrix} 22 \\ 47 \\ 18 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов. Решение системы находим по формуле $X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} - обратная матрица. Найдем A^{-1}. Для этого воспользуемся формулой $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}$, где $\tilde{A}$ - присоединенная матрица. Элементами присоединенной матрицы являются алгебраические дополнения элементов матрицы A^T, транспонированной к матрице A. Составим транспонированную матрицу A^T. Для этого заменим все строки матрицы A на столбцы с такими же номерами: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найдем теперь алгебраические дополнения ко всем элементам a_{ij} этой матрицы.

$$A_{11}^T = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{12}^T = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{13}^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21}^T = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23}^T = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{31}^T = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{32}^T = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33}^T = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

Составим присоединенную матрицу:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & A_{13}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & A_{23}^T \\ A_{31}^T & A_{32}^T & A_{33}^T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу: $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\tilde{A}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Определитель Δ матрицы A мы уже вычислили, когда решали систему уравнений 1-ым способом, $\Delta=6$.

Находим решение системы:

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 22 \\ 47 \\ 18 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5\cdot 22+4\cdot 47-1\cdot 18 \\ 4\cdot 22-2\cdot 47+2\cdot 18 \\ 7\cdot 22-2\cdot 47-1\cdot 18 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 60 \\ 30 \\ 42 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1=10,\quad x_2=5,\quad x_3=7$.

Задачи 121-130. Решить систему уравнений тремя способами (по теореме Крамера, методом Гаусса и с помощью обратной матрицы).

121) $\begin{cases} -3x_1+4x_2+x_3=17; \\ 2x_1+x_2-x_3=0; \\ -2x_1+3x_2+5x_3=8. \end{cases}$

122) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-3; \\ -2x_1+6x_2+9x_3=-11; \\ -4x_1-3x_2+8x_3=-2. \end{cases}$

123) $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=10; \\ -3x_1+3x_2+2x_3=8; \\ 5x_1+2x_2+8x_3=-1. \end{cases}$

124) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+9x_3=28; \\ 7x_1+3x_2-6x_3=-1; \\ 7x_1+9x_2-9x_3=5. \end{cases}$

125) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=-7; \\ x_1+2x_2-3x_3=14; \\ -x_1-x_2+5x_3=-18. \end{cases}$

126) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2; \\ 2x_1+6x_2+4x_3=-6; \\ 3x_1+10x_2+8x_3=-8. \end{cases}$

127) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8; \\ -2x_1+3x_2-3x_3=-5; \\ 3x_1-4x_2+5x_3=10. \end{cases}$ **128)** $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0; \\ 3x_2+4x_3=-6; \\ x_1+x_3=1. \end{cases}$

129) $\begin{cases} 2x_1-3x_2-x_3=-6; \\ 3x_1+4x_2+3x_3=-5; \\ x_1+x_2+x_3=-2. \end{cases}$ **130)** $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6; \\ 2x_1+3x_2-x_3=4; \\ 3x_1+x_2-4x_3=0. \end{cases}$

Тема 4. Элементы векторной алгебры

Литература [1],глава 3, §§ 3.1.

Пример 1. Даны вершины треугольника $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$, $C(1;-2;1)$. Определить его внутренний угол при вершине A.

Решение. Искомый угол $\hat{A}$ - это угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$. Найдем координаты этих векторов. Для $\vec{AB}$: вычтем из координат конца (точки B) координаты начала (точки A): $\vec{AB}=\{5-3;1-2;-1-(-3)\}=\{2;-1;2\}$. Аналогично для вектора $\vec{AC}=\{1-3;-2-2;1-(-3)\}=\{-2;-4;4\}$. Вычислим косинус угла $\hat{A}$ по формуле $\cos\hat{A}=\dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|}$, где $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ - скалярное произведение векторов, $|\vec{AB}|,|\vec{AC}|$ - длины векторов. Эта формула в координатах имеет следующий вид:

$$\cos\hat{A} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$, где

$\vec{AB} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{AC} = \{x_2; y_2; z_2\}$. Подставим координаты векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$:

$$\cos\hat{A} = \frac{2\cdot(-2) + (-1)\cdot(-4) + 2\cdot 4}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{4+16+16}} = \frac{8}{3\cdot 6} = \frac{4}{9}.$$

Отсюда $\hat{A} = \arccos\frac{4}{9} \approx 70.68^0$.

Пример 2. Даны вершины треугольника $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

Решение. Площадь треугольника ABC находится по формуле $S = \frac{|\vec{AB}\times\vec{AC}|}{2}$, где $\vec{AB}\times\vec{AC}$ - векторное произведение. Найдем координаты векторов, $\vec{AB} = \{2;-2;-3\}$, $\vec{AC} = \{4;0;6\}$. Векторное произведение векторов $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$ находится по формуле $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=\vec{i}\left((-2)\cdot 6-0\cdot(-3)\right)-\vec{j}\left(2\cdot 6-4\cdot(-3)\right)+\vec{k}\left(2\cdot 0-4\cdot(-2)\right)=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}$$

Так получили вектор $\vec{AB}\times\vec{AC}=\{-12;-24;8\}$.

Вычислим длину этого вектора:

$|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\sqrt{784}=28$. Тогда площадь треугольника $S=\dfrac{28}{2}=14$.

Пример 3. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}=\{2;3;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-1;3\}$, $\vec{c}=\{1;9;-11\}$.

Решение. Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, если смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ равно нулю. Смешанное произведение векторов $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$, $\vec{c}=\{x_3;y_3;z_3\}$ находится по формуле $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$. Подставим координаты векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -11 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -11 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}=$$

$$=2(11-27)-3(-11-3)-1(9+1)=-32+42-10=0.$$

Поскольку смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ равно нулю, векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны.

Задачи для контрольных работ.

131 - 140. Даны вершины пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$. Найти: 1) внутренний угол при вершине A_1 в треугольнике $A_1A_2A_4$; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;

131) $A_1(3; 2; 1)$, $A_2(2; -1; 8)$, $A_3(2; -1; 2)$, $A_4(6; -1; 6)$.

132) $A_1(-1; 3; 2)$, $A_2(-8; 5; 0)$, $A_3(-3; 7; -5)$, $A_4(-4; 1; 3)$.

133) $A_1(2; 0; -1)$, $A_2(-2; -11; 5)$, $A_3(1; -4; -1)$, $A_4(-2; 1; -4)$.

134) $A_1(4; -2; 3)$, $A_2(10; -3; -2)$, $A_3(8; -6; 3)$, $A_4(5; -6; 0)$.

135) $A_1(2; -5; 2)$, $A_2(-7; 2; 4)$, $A_3(6; -1; 3)$, $A_4(0; 1; 5)$.

136) $A_1(0; 1; 1)$, $A_2(3; 4; 4)$, $A_3(-3; 9; 3)$, $A_4(0; 5; 4)$.

137) $A_1(-2; 0; 4)$, $A_2(3; -3; 7)$, $A_3(-3; -5; 11)$, $A_4(-2; -7; 15)$.

138) $A_1(5; -1; 3)$, $A_2(8; 8; -3)$, $A_3(2; 0; -2)$, $A_4(4; 1; 0)$.

139) $A_1(3; 2; -2)$, $A_2(1; 3; 1)$, $A_3(6; 2; 0)$, $A_4(0; 2; 2)$.

140) $A_1(3; -2; 3)$, $A_2(0; -6; -1)$, $A_3(5; -9; -8)$, $A_4(3; -8; -5)$.

Тема 5. Аналитическая геометрия на плоскости

Литература [1],глава 4, §§ 4.2, 4.3.

Пример 1. Даны три вершины $A(-3; -1)$, $B(2; 2)$, $C(9; 1)$ параллелограмма $ABCD$. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.

Решение. Напишем уравнение стороны AB. Эта прямая проходит через точку $A(-3; -1)$ и имеет направляющий вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (5, 3)$. Следовательно, уравнение стороны AB имеет

вид: $\frac{x+3}{5}=\frac{y+1}{3}$.

Напишем уравнение стороны DC, параллельной AB. Для этого используем тот факт, что если прямые параллельны, то их направляющие векторы коллинеарны. Следовательно, уравнение стороны DC, проходящей через точку $C(2;2)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(5,3)$ можно представить в виде $\frac{x-9}{5}=\frac{y-1}{3}$.

Напишем уравнение стороны BC. Эта прямая проходит через точку $B(2;2)$ и имеет направляющий вектор $\vec{b}=\overrightarrow{BC}=(7,-1)$. Следовательно, уравнение стороны BC. имеет вид: $\frac{x-2}{7}=\frac{y-2}{-1}$.

Напишем уравнение стороны AD. Поскольку AD параллельна BC, то их направляющие векторы коллинеарны. Следовательно, уравнение стороны AD, проходящей через точку $A(-3;-1)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{b}=\overrightarrow{AD}=(7;-1)$ можно представить в виде $\frac{x+3}{7}=\frac{y+1}{-1}$.

*Пример 2.*Даны две точки $A(-3;1)$, $B(9;5)$. На отрезке AB найти точку C, делящую этот отрезок пополам.

Решение. Пусть точки A,B,C имеют координаты $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$, где тоска C является серединой отрезка AB, тогда можно написать, что $x_3=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_3=\frac{y_1+y_2}{2}$, следовательно, в данном случае получаем: $x_3=\frac{-3+9}{2}=3$, $y_3=\frac{1+5}{2}=3$. Серединой отрезка AB будет точка $C(3;3)$.

*Пример3.*Даны две точки $A(-3;1)$, $B(9;6)$. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $C(5;-2)$ перпендикулярно отрезку AB..

Решение. Вектор $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{AB}=(12;5)$ будет нормальным вектором искомой прямой. Пусть $M(x;y)$ произвольная точка прямой, тогда вектор $\overrightarrow{CM}=(x-5;y+2)$ - это вектор лежащий на данной прямой, следовательно векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CM}$ - ортогональны. Если векторы ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю, значит $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. Если написать этот условие в координатах, то получим: $12\cdot(x-5)+5\cdot(y+2)=0$, или $12\cdot x+5\cdot y-50=0$.

Задачи для контрольных работ.

141 - 150. Даны вершины $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ треугольника. Найти: 1) уравнение стороны AB; 2) уравнение медианы, проведенной из вершины C; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины C; 4) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

141) $A(5;1)$, $B(1;3)$, $C(-4;10)$.

142) $A(14;10)$, $B(-2;-2)$, $C(5;22)$.

143) $A(-13;3)$, $B(-1;-3)$, $C(2;2)$.

144) $A(22;-6)$, $B(-2;4)$, $C(-6;-2)$.

145) $A(12;4)$, $B(-2;-2)$, $C(-6;0)$.

146) $A(6;0)$, $B(2;-6)$, $C(-3;-9)$.

147) $A(15;9)$, $B(-1;-3)$, $C(6;21)$.

148) $A(-8;4)$, $B(4;-2)$, $C(7;2)$.

149) $A(10;-2)$, $B(-4;4)$, $C(-8;2)$.

150) $A(13;5)$, $B(-1;-3)$, $C(-5;1)$.

Тема 6. Аналитическая геометрия в пространстве

Литература [1],глава 4, §§ 4.7.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(2;-1;3)$, $M_1(3;1;2)$ $M_2(4;2;1)$

Решение. Для того, чтобы составить уравнение плоскости, нужно взять произвольную точку $M(x;y;z)$, лежащую на этой плоскости. Далее построим три вектора: вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-2;y+1;z-3)$; вектор $\overrightarrow{M_0M_1}=(1;2;-1)$; и вектор $\overrightarrow{M_0M_2}=(2;3;-2)$. Эти векторы компланарны, но если три вектора компланарны, то их смешанное произведение равно нулю. Напишем это условие в координатах:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

Вычислим получившийся определитель разложением этого определителя по первой строке, тогда получим:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\cdot(x-2)-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\cdot(y+1)+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\cdot(z-3)=0$$

После вычисления трех определителей второго порядка получаем:

$$-1\cdot(x-2)-0\cdot(y+1)-1\cdot(z-3)=0, \text{ или } x-z+1=0$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-1;0)$, перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{-5}=\dfrac{z+1}{4}$.

Решение. Для того, чтобы составить уравнение плоскости, нужно знать точку M_0, лежащую на этой плоскости и нормальный век-

тор $\overrightarrow{N}$ к этой плоскости.. Точка $M_0(2;-1;0)$ лежит на этой плоскости, а по условию задачи направляющий вектор прямой: $\vec{a}=(3;-5;4)$ перпендикулярен искомой плоскости, следовательно, вектор $\vec{a}$ можно взять в качестве нормального вектора искомой плоскости: $\overrightarrow{N}=\vec{a}=(3;-5;4)$. Пусть $M(x;y;z)$ произвольная точка искомой плоскости, тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и вектор $\overrightarrow{N}$ - ортогональны. . Если векторы ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю, значит $\overrightarrow{M_0M}\cdot\overrightarrow{N}=0.$ Если написать этот условие в координатах, то получим: $3\cdot(x-2)-5\cdot(y+1)+4\cdot z=0$, или $3\cdot x-5\cdot y+4z-11=0.$

Пример 3. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-1;0)$, перпендикулярно плоскости $2x+3y+z-1=0$.

Решение. Для того, чтобы составить канонические уравнения прямой, нужно знать точку M_0, лежащую на этой прямой и направляющий вектор $\vec{a}$ этой прямой.. Точка $M_0(2;-1;0)$ лежит на этой прямой, и по условию задачи нормальный вектор плоскости $\overrightarrow{N}=(2;3;1)$ параллелен искомой прямой, следовательно, вектор $\overrightarrow{N}$ можно взять в качестве направляющего вектора искомой прямой $\vec{a}=\overrightarrow{N}=(2;3;1)$. Пусть $M(x;y;z)$ произвольная точка искомой прямой, тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и вектор $\overrightarrow{N}$ - коллинеарны. Если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны, значит $\overrightarrow{M_0M}=\lambda\cdot\overrightarrow{N}$. Если написать этот условие в координатах, то получим канонические уравнения искомой прямой: $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$.

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-1;3)$, параллельно плоскости $7\cdot x-3\cdot y+2z-8=0.$

Решение. Для того, чтобы составить уравнение плоскости, нуж-

но знать точку M_0, лежащую на этой плоскости и нормальный вектор $\overrightarrow{N}$ к этой плоскости.. Точка $M_0(2;-1;3)$ лежит на этой плоскости, а по условию задачи нормальный вектор плоскости $7\cdot x-3\cdot y+2z-8=0$, то есть вектор $\overrightarrow{N}=(7;-3;2)$ перпендикулярен к искомой плоскости, следовательно, вектор $\overrightarrow{N}$ можно взять в качестве нормального вектора искомой плоскости: $\overrightarrow{N}=(7;-3;2)$. Пусть $M(x;y;z)$ произвольная точка искомой плоскости, тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и вектор $\overrightarrow{N}$ - ортогональны. . Если векторы ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю, значит $\overrightarrow{M_0M}\cdot\overrightarrow{N}=0.$ Если написать этот условие в координатах, то получим: $7\cdot(x-2)-3\cdot(y+1)+2\cdot(z-3)=0$, или $7\cdot x-3\cdot y+2z-23=0.$

Пример 5. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-2;3)$, параллельно отрезку AB, где $A(2;5;-3)$ и $B(3;-1;1)$,

Решение. Для того, чтобы составить канонические уравнения прямой, нужно знать точку M_0, лежащую на этой прямой и направляющий вектор $\vec{a}$ этой прямой.. Точка $M_0(2;-2;3)$ лежит на этой прямой, и по условию задачи вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(1;-6;4)$ параллелен искомой прямой, следовательно, вектор $\vec{a}$ можно взять в качестве направляющего вектора искомой прямой $\vec{a}=(1;-6;4)$. Пусть $M(x;y;z)$ произвольная точка искомой прямой, тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и вектор $\vec{a}$ - коллинеарны. . Если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны , значит $\overrightarrow{M_0M}=\lambda\cdot\vec{a}$. Если написать этот условие в координатах, то получим канонические уравнения искомой прямой: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-6}=\frac{z-3}{4}$.

Задачи для контрольных работ.

151 - 160. Даны вершины пирамиды $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$. Найти: 1) уравнение плоскости, проходящей через вершины A_1, A_2, A_3; 2) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1\ A_2\ A_3$; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины A_4 на грань $A_1\ A_2\ A_3$; 4) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_4 параллельно грани $A_1\ A_2\ A_3$; 5) уравнение прямой, проходящей через вершину A_2 параллельно ребру A_1A_4.

151) $A_1(3; 2; 1)$, $A_2(2; -1; 8)$, $A_3(2; -1; 2)$, $A_4(6; -1; 6)$.
152) $A_1(-1; 3; 2)$, $A_2(-8; 5; 0)$, $A_3(-3; 7; -5)$, $A_4(-4; 1; 3)$.
153) $A_1(2; 0; -1)$, $A_2(-2; -11; 5)$, $A_3(1; -4; -1)$, $A_4(-2; 1; -4)$.
154) $A_1(4; -2; 3)$, $A_2(10; -3; -2)$, $A_3(8; -6; 3)$, $A_4(5; -6; 0)$.
155) $A_1(2; -5; 2)$, $A_2(-7; 2; 4)$, $A_3(6; -1; 3)$, $A_4(0; 1; 5)$.
156) $A_1(0; 1; 1)$, $A_2(3; 4; 4)$, $A_3(-3; 9; 3)$, $A_4(0; 5; 4)$.
157) $A_1(-2; 0; 4)$, $A_2(3; -3; 7)$, $A_3(-3; -5; 11)$, $A_4(-2; -7; 15)$.
158) $A_1(5; -1; 3)$, $A_2(8; 8; -3)$, $A_3(2; 0; -2)$, $A_4(4; 1; 0)$.
159) $A_1(3; 2; -2)$, $A_2(1; 3; 1)$, $A_3(6; 2; 0)$, $A_4(0; 2; 2)$.
160) $A_1(3; -2; 3)$, $A_2(0; -6; -1)$, $A_3(5; -9; -8)$, $A_4(3; -8; -5)$.

Васильева Е.Н., Денисова О.И.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
методические указания и контрольные
задания для студентов МГУП

ЛР № 020360 от 05.10.2009г.

Подписано в печать	Формат 60×84/16
Т. экз. Объем уч.-изд. л.	Печать офсетная
Бумага типогр. №2 Заказ	Цена договорная

Редакционно-издательский отдел МГУП