Тема 1. Дифференциальные уравнения

Основные вопросы.

1. Определение дифференциального уравнения.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка.
3. Общее и частное решение дифференциального уравнения первого порядка.
4. Уравнения с разделяющимися переменными.
5. Однородные уравнения первого порядка.
6. Линейные уравнения первого порядка.
7. Уравнение Бернулли
8. Дифференциальные уравнения высших порядков. Некоторые типы дифференциальных уравнений второго порядка, приводимых к уравнениям первого порядка.
9. Линейные однородные уравнения второго порядка. Определитель Вронского. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
10. Неоднородные линейные уравнения второго порядка. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами со специальными правыми частями.

Рассмотрим решение типичных задач по данной теме.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - \frac{2}{x} \cdot y = x^3.$$

Решение. Данное уравнение является линейным, так как имеет вид

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x),$$

где $P(x) = -\frac{2}{x}$, $Q(x) = x^3$. Будем искать решение уравнения в виде произведения двух функций $y = u(x) \cdot v(x)$. Дифференцируя, имеем $y' = u'v + uv'$. Подставим в уравнение: $u'v + uv' - \frac{2}{x} \cdot u \cdot v = x^3$. Вынесем v за скобки $uv' + v\left(u' - \frac{2}{x} \cdot u\right) = x^3$. Так как искомая функция y представлена в виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Выберем функцию u так, чтобы выражение, стоящее в круглых скобках, обращалось в нуль, т.е. $u' - \frac{2}{x} \cdot u = 0$, $\frac{du}{dx} = 2\frac{u}{x}$ или $\frac{du}{u} = 2\frac{dx}{x}$ интегрируя, получим $\ln|u| = 2\ln|x|$, или $u = x^2$. Подставим в уравнение найденное значение $u(x)$: $x^2 \cdot v' = x^3$, $\frac{dv}{dx} = x$, $dv = x\,dx$. Интегрируя, получим $v = \frac{x^2}{2} + C$. Тогда общее решение линейного уравнения будет $y = u \cdot v = x^2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C\right)$.

Пример 2. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 3{,}2$.

Решение. Структура общего решения данного уравнения определяется следующей основной теоремой: Общее решение линейного неоднородного уравнения можно

представить как сумму общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения: $y_{О.Н.} = y_{О.О.} + y_{Ч.Н.}$

Напишем однородное уравнение (уравнение без правой части): $y'' - 2y' + 10y = 0$.

Составим характеристическое уравнение. Для этого заменим $y'' \to k^2$, $y' \to k$, $y \to 1$.

Получим $k^2 - 2k + 10 = 0$. Решим это уравнение $k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-10}$, $k_{1,2} = 1 \pm 3i$. Здесь корни характеристического уравнения комплексные, т.е. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

Тогда общее решение однородного уравнения $y_{о.о.} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cdot \cos\beta x + C_2 \cdot \sin\beta x\right)$.

У нас $\alpha = 1$, $\beta = 3$, тогда $y_{о.о.} = e^{x}\left(C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x\right)$.

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_{4.н.} = Ax^2 + Bx + C$.

Найдем производные $y'_{4.н.} = 2Ax + B$, $y''_{4.н.} = 2A$.

Подставим эти значения в заданное уравнение:

$$2A - 2\cdot\left(2Ax + B\right) + 10\cdot\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 10x^2 + 18x + 6.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях *x*:

при x^2: $10A = 10$ $\qquad A = 1$

при x^1: $-4A + 10B = 18$ $\qquad B = 2{,}2$

при x^0: $2A - 2B + 10C = 6$ $\qquad C = 0{,}84$

Частное решение уравнения имеет вид $y_{4.н.} = x^2 + 2{,}2x + 0{,}84$.

$$y_{о.н.} = e^{x}\left(C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x\right) + x^2 + 2{,}2x + 0{,}84.$$

Теперь решим задачу Коши, т.е. найдем C_1 и C_2, удовлетворяющие начальным условиям.

Найдем производную

$$y'_{о.н.} = e^{x}\left(C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x\right) = e^{x}\left(-3C_1 \cdot \sin 3x + 3C_2 \cdot \cos 3x\right) + 2x + 2{,}2$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 3{,}2 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{cases} C_1 + 0{,}84 = 1 \\ C_1 + 3C_2 + 2{,}2 = 3{,}2 \end{cases}$$

$$C_1 = 0{,}16; \quad 3C_2 = 3{,}2 - 2{,}2 - 0{,}16 = 0{,}84; \quad C_2 = 0{,}28.$$

Частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, окончательно примет вид:

$$y = e^{x}\left(0{,}16\cos 3x + 0{,}28\sin 3x\right) + x^2 + 2{,}2x + 0{,}84$$

Тема 2. Разностные уравнения

Основные вопросы.

1. Линейные разностные уравнения первого порядка.
2. Задача Коши для линейного разностного уравнения первого порядка.
3. Линейные разностные стационарные уравнения второго порядка.
4. Структура общего решения линейного однородного уравнения.
5. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения.
6. Решение линейного однородного стационарного уравнения. Характеристическое уравнение.
7. Нахождение частного решения линейного неоднородного уравнения для правой части специального вида.

Пример 1. Решить уравнение $y(k+1)=\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2 y(k)+\frac{2k+4}{k+3}$.

Решение. Это линейное разностное уравнения первого порядка, т.к. имеет вид

$$y(k+1)=\alpha(k)y(k)+f(k),$$

где $\alpha(k)=\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2$, $\quad f(k)=\frac{2k+4}{k+3}$.

Общее решение находим по формуле $y(k)=\left(C+\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f(j)}{A(j+1)}\right)\cdot A(k)$,

где $A(k)=\prod_{j=0}^{k-1}\alpha(j)$, C - произвольная постоянная.

Найдем $A(k)$:

$$A(k)=\prod_{j=0}^{k-1}\alpha(j)=\alpha(0)\cdot\alpha(1)\cdot\alpha(2)\cdot\ldots\cdot\alpha(k-1)=\frac{4}{1}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{16}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{(k+1)^2}{k^2}=(k+1)^2.$$

Затем вычислим $\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f(j)}{A(j+1)}$:

$$\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f(j)}{A(j+1)}=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{2j+4}{(j+3)(j+2)^2}=2\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j+2}{(j+3)(j+2)^2}=2\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(j+3)(j+2)}=$$

$$=2\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{j+2}-\frac{1}{j+3}\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{k}{k+2}.$$

Подставляя найденные выражения в формулу общего решения, получим ответ:

$$y(k)=\left(C+\frac{k}{k+2}\right)\cdot(k+1)^2.$$

Пример 2. Решить уравнение $y(k+2)+y(k+1)-2y(k)=0$.

Решение. Это линейное разностное стационарное уравнение второго порядка, т.к. имеет вид:

$$y(k+2)+a_1y(k+1)+a_2y(k)=0.$$

У нас $a_1=1,\ a_2=-2$. Составим характеристическое уравнение. Для этого заменим $y(k+2)\to\lambda^2$, $y(k+1)\to\lambda$, $y(k)\to 1$. Получим $\lambda^2+\lambda-2=0$. Решим это уравнение. Его корни $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1$ -действительные и различные числа. В этом случае общее решение находится по формуле $y(k)=C_1\lambda_1^k+C_2\lambda_2^k$.

Подставляя $\lambda_1,\ \lambda_2$, получим ответ: $y(k)=C_1(-2)^k+C_2$.