

Тема 5. Определенный интеграл

Если у непрерывной функции $f(x)$ известна первообразная $F(x)$, то определенный интеграл можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

С помощью определенного интеграла можно находить площади плоских фигур, объемы тел, длины дуг кривых, а также решать многие другие задачи.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$

Решение. Найдем сначала неопределенный интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} &= \left\| \begin{array}{l} d(1+x^2) = 2x dx \\ 1+x^2 = t \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int t^{-2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда по формуле Ньютона-Лейбница } \int_1^3 \frac{x dx}{(1+x^2)^2} &= -\frac{1}{2(1+x^2)} \Big|_1^3 = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+3^2} - \frac{1}{1+1^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \right) = 0,2. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos^2 x dx$.

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos^2 x dx \stackrel{1)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x + x \cos 2x) dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx \stackrel{2)}{=}$$

$$\left\| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{array} \right. \quad \left\| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \left(x \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx \right) = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{4} +$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} - 0 - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) \right) = \frac{\pi^2}{64} + \\
&\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi^2}{64} + \\
&+ \frac{1}{16} (\pi - 2).
\end{aligned}$$

Поясним решение

1) Применили тригонометрическую формулу

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, что дало возможность разложить интеграл на

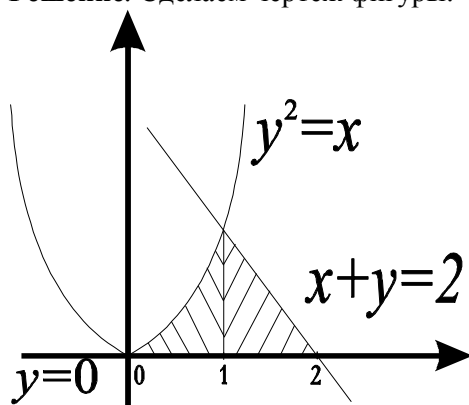
сумму двух интегралов.

2) Ко второму интегралу применили формулу интегрирования

по частям для определенного интеграла: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$.

Пример 3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2$, $x+y=2$, $y=0$.

Решение. Сделаем чертеж фигуры.



Применим формулу $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ сначала на отрезке $[0;1]$ к

функции $y=x^2$, затем - на отрезке $[1;2]$, к функции $y=2-x$. Тогда

$$V_1 = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5},$$

$$V_2 = \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = \pi \int_1^2 (x-2)^2 dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} x-2=t \\ dx=dt \end{matrix} \right\| = \pi \int_{-1}^0 t^2 dt = \pi \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^0 = \frac{\pi}{3} (0 - (-1)^3) = \frac{\pi}{3}. \text{ Следовательно,}$$

искомый объем будет равен $V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3} = \frac{8}{15} \pi$ (ед.³). Заметим,

что объем V_2 можно было найти по известной формуле из элементарной математики, как объем конуса.

Задачи для самостоятельной работы.

501. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=x+2$.

502. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{x}{4}$

и $x=1$.

503. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2$ и $y=2-x$.

504. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ и $x=1$.

505. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox

фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}$, $y=0$, $x=1$ и $x=2$.

506. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox

фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y=2-x$ и $y=0$.

507. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox

фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=2x$.

508. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox **509.**

Найти длину дуги линии $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ от $x=0$ до $x=1$.

510. Найти длину дуги линии $y = 2x\sqrt{x}$ от $x=0$ до $x=4$.

фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{2x}$ и $y=x$.