Тема 2. Производная и ее приложения

Рассмотрим решение типичных задач по данной теме.

Пример 1. Найти производные функций указанного порядка.

а) $y = 3\operatorname{ctg}x + \dfrac{e^x}{1-x},\ y' = ?$

б) $y = \sin^3 x,\ y' = ?,\ y'' = ?$

Решение.

а) Применим правило дифференцирования суммы $\left(u+v\right)' = u' + v'$, тогда $y' = \left(3\operatorname{ctg}x + \dfrac{e^x}{1-x}\right)' = \left(3\operatorname{ctg}x\right)' + \left(\dfrac{e^x}{1-x}\right)'$. При дифференцировании первого слагаемого используем формулу: $\left(c\,f\left(x\right)\right)' = c\left(f\left(x\right)\right)'$, где c - константа. Получим $\left(3\operatorname{ctg}x\right)' = 3\left(\operatorname{ctg}x\right)' = 3\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = -\dfrac{3}{\sin^2 x}$. Для второго слагаемого применим формулу $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$. Получим

$$\left(\frac{e^x}{1-x}\right)' = \frac{\left(e^x\right)'\left(1-x\right) - \left(1-x\right)'e^x}{\left(1-x\right)^2} =$$

$$= \frac{e^x\left(1-x\right) - \left(-1\right)e^x}{\left(1-x\right)^2} = \frac{e^x\left(1-x+1\right)}{\left(1-x\right)^2} = \frac{e^x\left(2-x\right)}{\left(1-x\right)^2}.$$ Итак, в ответе получим:

$$\left(3\operatorname{ctg}x+\frac{e^x}{1-x}\right)'=\frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}-\frac{3}{\sin^2 x}.$$

б) Замечая, что $y=\sin^3 x$ является сложной функцией $y=u^3$, где $u=\sin x$, применим правило дифференцирования сложной функции: $\left(y(u(x))\right)_x'=y_u'\cdot u_x'$. Получим: $y_x'=\left(u^3\right)_u'\cdot u_x'=3u^2\cdot(\sin x)_x'=3\sin^2 x\cdot\cos x$. Итак, в ответе получим $y'=3\sin^2 x\cos x$. Найдем y''. Так как $y''=(y')'$, то $y''=\left(3\sin^2 x\cos x\right)'=3\left(\sin^2 x\cdot\cos x\right)'$. Применим формулу для вычисления производной произведения: $(u\cdot v)'=u'v+v'u$, полагая $u=\sin^2 x$, а $v=\cos x$ получим: $\left(\sin^2 x\cdot\cos x\right)'=\left(\sin^2 x\right)'\cos x+(\cos x)'\sin^2 x$. Как и выше заметим, что функция $y=\sin^2 x$ сложная - $y=u^2$, $u=\sin x$, поэтому $\left(\sin^2 x\right)'=2\sin x\cos x=$ $=\sin 2x$, а так как $(\cos x)'=-\sin x$, имеем $\left(\sin^2 x\cos x\right)'=\sin 2x\cos x+$ $+\sin^2 x\cdot(-\sin x)=\sin 2x\cos x-\sin^3 x$. Итак, в ответе получаем

$$\left(\sin^3 x\right)''=3\left(\sin 2x\cos x-\sin^3 x\right).$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $y=(\cos x)^{\sin x}$.

Решение. Найдем сначала y', так как $dy = y'dx$. Применим метод логарифмического дифференцирования, а именно: по правилу дифференцирования сложной функции $\ln y(x)$ имеем: $\left(\ln y(x)\right)' = \frac{y'}{y}$ или $y' = y \cdot \left(\ln\left(y(x)\right)\right)'$. Значит для данной функции:

$$y' = (\cos x)^{\sin x}\left(\ln(\cos x)^{\sin x}\right)' = (\cos x)^{\sin x}\left(\sin x \cdot \ln\cos x\right)' =$$

$$= (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln\cos x + \sin x \frac{-\sin x}{\cos x}\right) =$$

$(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$. Итак, в ответе получим

$$dy = d\left((\cos x)^{\sin x}\right) = \left((\cos x)^{\sin x}\right)' dx = (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)dx$$

Пример 3. Вычислить пределы, пользуясь правилом Лопиталя (см. I гл. IV §§ 4 - 5).

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\mathrm{tg}x}$.

Решение.

а) Предел и числителя, и знаменателя равны 0, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. По правилу Лопиталя имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin^2 x)'}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$, то имеем неопределенность вида $\infty\cdot 0$, так как $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$, то можно преобразовать ее к виду $\frac{\infty}{\infty}$, а затем применить правило Лопиталя. Так получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0,\text{ так как }\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty.$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{e^x-1}=\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to 0}e^x=e^0=1\text{ и }\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)=1-1=0\right)$, то имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Сведем ее к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, приводя дроби к общему знаменателю. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x(e^x-1))'}=$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{1\cdot(e^x-1)+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$, так как и здесь пределы числителя и знаменателя равны нулю, то опять имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применив правило Лопиталя получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(e^x-1+xe^x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x\left(2+x\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\mathrm{tg}x}$, так как $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$, а $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{tg}x=\infty$, то имеем неопределенность вида 1^{∞}. Используя основное логарифмическое тождество, получим $\left(\sin x\right)^{\mathrm{tg}x}=e^{\ln\left(\sin x\right)^{\mathrm{tg}x}}=e^{\mathrm{tg}x\ln\sin x}$, значит $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\mathrm{tg}x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\mathrm{tg}x\ln\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{tg}x\ln\sin x}$. Найдем предел показателя: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\mathrm{tg}x\ln\sin x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\ln\sin x}{\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{\cos x}=1\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{\cos x}$,т.к.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\ln 1=0$ и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$, то имеем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$ и, применяя правило Лопиталя, получим

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\ln \sin x)'}{(\cos x)'} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0$. Значит, в ответе имеем $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1$.

Пример 4. Провести полное исследование функции и построить график этой функции $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$.

Исследуем функцию согласно схеме:

1. Исследовать функцию алгебраическими методами: найти область определения функции исследовать функцию на четность и нечетность, исследовать функцию на периодичность.
2. Исследовать функцию с помощью пределов: найти точки разрыва функции и асимптоты графика функции.
3. Исследовать функцию по первой производной: найти интервалы монотонности и точки экстремума функции.
4. Исследовать функцию по второй производной: исследовать график функции на выпуклость и вогнутость и найти точки перегиба.
5. Если понадобится, то провести дополнительное исследование функции с помощью всех вышеперечисленных методов, например, найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции, найти угол наклона касательной к графику функции в некоторой точке, лежащей на графике этой функции, в частности в точке перегиба, если такая точка имеется на графике и т.д..

6. Построить график функции.

Решение.

1. Область определения функции $D_f = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

2. Не периодична.

3. Так как $f(-x)=\frac{x^2}{1+x}$, то $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, следовательно функция не является ни четной ни нечетной.

4. Точки пересечения графика с осями:

а) с $0x$: y=0, т.е. $\frac{x^2}{1+x}=0$, x=0.

б) с $0y$: x=0, т.е. $y=\frac{0}{1-0}$ =0.

График пересекает оси в начале координат. Найдем интервалы знакопостоянства функции (т.е. интервалы, где она положительна и интервалы, где она отрицательна). $f(x)>0$, при $\frac{x^2}{1-x}>0$, т.е. при $1-x>0$, $x<1$. Итак, $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;1)$; $f(x)<0$ при $x\in(1;+\infty)$.

5. Точка разрыва: x=1.

Асимптоты: x=1 - вертикальная асимптота, так как $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{1-x}=\infty$. Найдем уравнение наклонной асимптоты: $y=kx+b$. k=-1, т.к. $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(1-x)x}=-1$, и b=-1, т.к. $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{1-x}+x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-x^2}{1-x}=-1.$

Таким образом, $y=-x-1$ - наклонная асимптота графика.

6. $f'(x)=\frac{2x(1-x)-x^2(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2x-2x^2+x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}=\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$,

$f'(x)=0$ при x=0 и x=2 и не существует при x=1.

Итак, критические точки функции x=0, x=2, x=1. Изучим поведение функции в окрестности каждой критической точки. Результаты сведены в таблице.

Таблица.

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<2$	2	$2<x<+\infty$
$f'(x)$	–	0	+	не существует	+	0	–
$f(x)$	убывает	0 min	возрастает	не существует	возрастает	–4 max	убывает

В точке x=1 функция не имеет экстремума, так как она в ней не определена.

7. Исследуем функцию на выпуклость.

$$f''(x)=\frac{(2-2x)(1-x)^2+2(2x-x^2)(1-x)}{(1-x)^4}=$$

$$\frac{2-2x-2x+2x^2+4x-2x^2}{(1-x)^3}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

$f''(x)>0$ при $(1-x)^3>0$, т.е. при 1-x>0 или x<1. $f''(x)>0$ при $x\in(-\infty;1)$ и на этом промежутке график имеет выпуклость вниз, а при $x\in(1;+\infty)$ - выпуклость вверх. Отметим это в таблице.

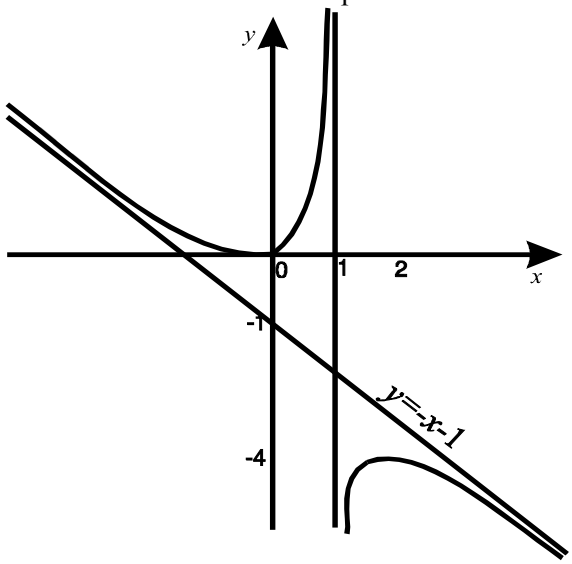
Таблица

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f''(x)$	+	не определена	–

$f(x)$	выпуклость вниз		выпуклость вверх

График функции не имеет точек перегиба.

8. На основании проведенного исследования строим график функции, рис. 6.



Задачи для самостоятельной работы.

201-210. Для заданных функций найти

а) первую производную y' и вторую производную y'';

б), в) первую производную y';

г) дифференциал *dy*.

201) а) $y = 3x^4 - \frac{5}{3x^3} - 1$; б) $y = \left(x^2 - 1\right)\ln 2x$;

в) $y = \frac{\cos x^2}{\sin 3x}$; г) $y = e^{\sin 5x}$

202) а) $y = 2x^5 - \dfrac{1}{3x^3} + 5$; б) $y = \left(x^3 + x - 1\right)\sin 4x$;

в) $y = \dfrac{2^x}{\sin^2 x}$; г) $y = \sin^4 x$.

203) а) $y = 4x^2 - \dfrac{5}{3x^6} + 1$; б) $y = \left(2x^2 - 7x\right)\cdot 10^{(1-x)}$;

в) $y = \dfrac{x}{\sin^2 x}$; г) $y = \operatorname{ctg}^2 x$.

204) а) $y = 3 - \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{6}{x^5}$; б) $y = 3^{\sqrt{x}}\operatorname{tg} 7x$;

в) $y = \dfrac{\sin x^2}{x^3 - 1}$; г) $y = \sin^3 3x$.

205) а) $y = 2x^2 + \dfrac{3}{x^2} + 5$; б) $y = \left(1 - x^3\right)\operatorname{arctg} 6x$;

в) $y = \dfrac{\sin(1-x)}{x^2 + 6}$; г) $y = tg^3\left(2x - 3\right)$.

206) а) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{4}{x^4} + 5$; б) $y = \left(1 + \operatorname{arctg} 3x\right)e^x$;

в) $y = \dfrac{\cos\left(1 - 3x\right)}{x^2}$; г) $y = 6^{\sqrt{x}}$.

207) а) $y=\frac{x^7}{5}+\frac{3}{x^3}+1$; б) $y=\left(1-2x+x^2\right)\operatorname{tg}6x$;

в) $y=\frac{\sin\left(2-x\right)}{e^{3x}}$; г). $y=c\operatorname{tg}^2 2x$

208) а) $y=1-\frac{2}{x^6}-\frac{\left(x+1\right)^2}{3}$; б) $y=\sqrt{x}\cdot\arccos\left(1-x^2\right)$;

в) $y=\frac{3+2x}{\sin^4 x}$; г) $y=\cos^3 7x$.

209) а) $y=\frac{5x^3}{3}+\frac{6}{x}-1$; б) $y=e^{\sqrt{x}}\left(1-\operatorname{arctg}8x\right)$;

в) $y=\frac{4-5x}{\cos^2 3x}$; г) $y=\ln^3\sin x$.

210) а) $y=1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2x}$; б) $y=\left(\ln\left(3x^2-1\right)\right)\cdot\sin 2x$;

в) $y=\frac{2-\sin x}{\sin e^x}$; г) $y=3^{arc\operatorname{ctg}x}$.

211-220. Найти пределы с помощью правила Лопиталя

211) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 3x}$; **212)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$;

213) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$; **214)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$; **215)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$;

216) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$; **217)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{tg^2 x}$;

218) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln^4 x}{x^9}$; **219)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$; **220)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}$.

221-230. Провести полное исследование данной функции и построить ее график

221) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$; **222)** $y=\dfrac{x^2+1}{x}$;

223) $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$; **224)** $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$

225) $y=\dfrac{2x^2-3}{x^2}$; **226)** $y=\dfrac{x^2-3}{x}$;

227) $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$; **228)** $y=\dfrac{x^2-2}{x}$;

229) $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$; **230)** $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$.