Модель №4

18.2. Предельный анализ

Производные применяются в экономике для получения так называемых предельных издержек, предельной выручки, предельной прибыли и т.п. Слово «предельный» в этих терминах означает производную, или скорость изменения.

18.34. Функция издержек имеет вид $C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}2x^2 + 10x + 2000$. Найти предельные издержки и посчитать их значение в точке $x = 10$.

Решение.

$$C'(x) = 0{,}03x^2 - 0{,}4x + 10$$

$$C'(10) = 3 - 4 + 10 = 9.$$

Пользуясь формулой для приближенного значения приращения функции

$$\Delta C \approx \mathrm{d}C = C'(x)\Delta x,$$

можно интерпретировать величину $C'(10)$: если произведено 10 изделий, то дополнительные издержки ΔC по производству одиннадцатого изделия приближенно равны $C'(10) = 9$.

Аналогично находятся предельная выручка (доход) $R'(x)$ и предельная прибыль $P'(x)$.

18.37. Объем продаж видеомагнитофонов задается следующей функцией времени:

$$V(t) = 5000 + 1000t - 100t^2,$$

где t — время, измеряемое в месяцах;

V — количество видеомагнитофонов, проданных за месяц.

Найти скорость изменения объема продаж в момент времени:

а) $t = 0$; б) $t = 3$; в) $t = 6$.

18.38. Население некоторой страны растет по следующему закону:

$$P(t) = 100\,000(1 + t)^2,$$

где время t измеряется в годах. Найти скорость изменения населения в момент времени:

а) $t = 0$; б) $t = 2$; в) $t = 5$.

18.39. Эпидемия медленно распространяется среди населения. Число заболевших определяется формулой

$$A(t) = 200\left(t^{\frac{5}{2}} + t^2\right),$$

где t — число недель, прошедших с момента начала эпидемии.

Найти скорость изменения числа заболевших в момент времени:

а) $t = 1$; б) $t = 4$; в) $t = 9$.

18.40. Предположим, что издержки получения питьевой воды заданы формулой

$$C = \frac{10\,000}{p} - 100,$$

где p — процентное содержание загрязняющих воду примесей.

Найти скорость изменения издержек производства, если примеси составляют 5%.

18.41. Предположим, что спрос на некоторую продукцию зависит от цены p следующим образом:

$$D(p) = \frac{25\,000}{p^2} - \frac{1}{5}.$$

Найти скорость изменения спроса, если цена равна:

а) 10; б) 25.

18.42. Издержки удаления p процентов загрязнений из использованной воды равны

$$C(p) = \frac{7600p}{105 - p}.$$

Найти скорость изменения издержек в точке $p = 52{,}5$.

18.43. Спрос на некоторый товар зависит от цены p следующим образом:

$$D(p) = \frac{100}{\sqrt{p}} - \frac{1}{4}.$$

Найти скорость изменения спроса, если цена равна:

а) 100; б) 16.

18.44. Выручка от оптовой продажи радиоприемников определяется функцией

$$R(x) = 75x - 0{,}05x^2, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 750,$$

где x — число проданных радиоприемников.

Найти предельную выручку, если продано:

а) 100 радиоприемников;

б) 200 радиоприемников.

18.45. Найти предельную выручку для следующих функций $R(x)$:

а) $R(x) = 2x - 0{,}01x^2$;

б) $R(x) = 4x - 0{,}005x^{\frac{3}{2}}$;

в) $R(x) = 0{,}2x - 10^{-2}x^2 - 10^{-4}x^{\frac{5}{2}}$;

г) $R(x) = 50x - 2x^3(\sqrt{x} + 1)$.

18.46. Найти предельную выручку, если заданы уравнение спроса и значение цены на некоторую продукцию:

а) $10x + p = 100, \qquad p = 80$;

б) $\sqrt{x} + 3p = 50, \qquad p = 10$;

в) $x^{\frac{3}{2}} + 10p = 94$, $\quad p = 38{,}6$;

г) $2p + x + 0{,}02x^2 = 1000$, $\quad p = 494$.

18.47. В задаче 18.46 дополнительно заданы функция издержек и точка:

а) $C(x) = 50 + 3x$, $\quad x = 3$;

б) $C(x) = 40 + x$, $\quad x = 6$;

в) $C(x) = 100 + x^{\frac{3}{2}}$, $\quad x = 4$;

г) $C(x) = 70 + 0{,}1x^2$, $\quad x = 25$.

Найти предельную прибыль и вычислить ее значение в заданной точке.

18.48. В задаче 18.47 (пункты «а», «б» и «г») найти максимальное значение прибыли. При какой цене p прибыль принимает свое максимальное значение?

18.49. Количество произведенной за день продукции $Q(x)$ зависит от числа рабочих в сборочном цехе следующим образом:

$$Q(x) = 100x + 3x^2,$$

где x — число рабочих.

а) Если в сборочном цехе работали 70 человек, оценить изменение количества произведенной за неделю продукции, вызванное добавлением одного рабочего.

б) Найти точное значение прироста выработки за неделю, вызванного добавлением одного рабочего.

18.50. Месячное производство $Q(x)$ некоторого продукта зависит от инвестиций следующим образом:

$$Q(x) = 500x^{\frac{3}{2}},$$

где x — инвестированный капитал в миллионах рублей.

Вычислить точно и приближенно прирост производства, вызванный дополнительным вложением 1 млн. руб., если первоначальные инвестиции составляли 100 млн. руб.

18.51. Пусть спрос q на некоторый товар зависит от цены p следующим образом:

$$q = \frac{40\,000}{p^2} - 1, \quad p > 0.$$

Вычислить точно и приближенно изменение спроса, если цена вырастет:

а) с 50 до 51; б) со 100 до 101.

18.52. Издержки производства некоторой продукции имеют вид

$$C(x) = 100 + 3x + x^2,$$

где x — число единиц продукции. Цена на этот товар составляет 20. Найти функцию предельной прибыли и ее значение в точке 30. Объяснить экономический смысл значения $P'(30)$. Вычислить и объяснить смысл величины $P(31) - P(30)$.

18.53. Издержки производства некоторой продукции имеют вид

$$C(x) = 150 + 10x + 0{,}01x^2,$$

где x — число единиц продукции. Цена на этот товар составляет 36. Найти функцию прибыли и функцию предельной прибыли. Объяснить экономический смысл величины $P'(15)$. Вычислить и объяснить смысл величины $P(16) - P(15)$.

18.54. Функция издержек производства некоторой продукции определяется следующей формулой:

а) $C(x) = 2000 + 100x + 0{,}1x^2$;

б) $C(x) = 3500 + 150x + 0{,}2x^2$,

где x — число единиц произведенной продукции.

Найти функцию предельных издержек, средние издержки производства x единиц продукции и скорость изменения средних издержек. При каком уровне производства скорость изменения средних издержек равна нулю?

18.55. Фотограф заметил, что при цене 110 руб. за набор фотографий на паспорт он делает 45 наборов в день. Если повысить цену до 120 руб., то число клиентов снижается до 40. Считая линейным соотношение между спросом и ценой, найти функцию выручки. При каком значении цены выручка достигает своего максимального значения?

18.56. Производитель телевизоров продает 100 телевизоров в неделю при цене 1800 руб. за каждый. Если цена повышается до 1900 руб., то объем продаж снижается до 80 телевизоров. Фиксированные издержки производства телевизора составляют 50 тыс. руб. в неделю, а переменные издержки — 800 руб. за один телевизор. Полагая линейным закон спроса, найти функцию прибыли. Какова максимальная прибыль и при какой цене она достигается?

18.57. В гостинице 60 номеров. При цене 300 руб. за номер в сутки бывает занято 50 номеров. Если цена снижается до 280 руб. за номер, то занято 55 номеров. Найти максимальное значение выручки, предполагая линейным закон спроса. При какой цене достигается это значение?

18.58. Ресторан рассчитан не более чем на 100 посетителей. При цене 120 руб. за обед бывает 70 посетителей, а при цене 100 руб. за обед число посетителей возрастает до 80. Фиксированные издержки приготовления обеда составляют 900 руб. в день, а переменные — 40 руб. за обед. Найти функцию прибыли, предполагая линейной зависимость между числом посетителей и ценой обеда. Каково максимальное значение прибыли?

18.59. Цена на некоторый товар составляет 250 руб. Издержки производства этого товара равны $120x + x^2$, где x — число единиц произведенного товара. Найти максимальное значение прибыли.

18.60. Издержки производства некоторой продукции определяются функцией $5x^2 + 80x$, где x — число единиц произведенной за месяц продукции. Эта продукция продается по цене 280 руб. за изделие. Сколько изделий нужно произвести и продать, чтобы прибыль была максимальна.

18.61. Пусть известны функции соответственно спроса и предложения на некоторый товар на конкурентном рынке:

$$p = 2x + 50,$$
$$p = -x + 200,$$

где x — число единиц товара.

Предположим, что средние издержки производства одной единицы товара определяются следующей функцией:

$$\overline{C}(x) = \frac{500}{x} + 70 + 2x.$$

Найти максимальное значение прибыли.

18.62. На монопольном рынке спрос на некоторый товар определяется следующей функцией:

$$p = 780 - 2x - 0{,}1x^2,$$

где x — число единиц товара.

Найти максимальную прибыль, если средние издержки производства этого товара составляют

$$\overline{C}(x) = \frac{1000}{x} + 500 + 2x.$$

При каком значении цены прибыль максимальна?

18.63. Функция потребления некоторой страны имеет вид

$$C(y) = 6 + 0{,}36y + 0{,}46y^{\frac{3}{4}},$$

где y — совокупный национальный доход.

Найти а) предельную склонность к потреблению и б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 5.

Модель №5

Функция потребления и сбережения. В экономике используются понятия функций потребления и сбережения.

Обозначим через y доход, остающийся у населения после уплаты налогов. Этот доход состоит из двух слагаемых. Часть дохода население тратит. Эта часть составляет *функцию потребления*, которую обычно обозначают $C(y)$. Второе слагаемое $S(y)$ составляют сбережения населения. Функция $S(y)$ называется *функцией сбережения*. Очевидно, что

$$y = C(y) + S(y).$$

Функции потребления и сбережения обычно считаются линейными в течение короткого промежутка времени. На больших интервалах времени эти функции не являются линейными.

Если национальный доход y получает приращение Δy, то функции потребления и сбережения также получают приращения соответственно ΔC и ΔS:

$$\Delta y = \Delta C + \Delta S.$$

Последнее равенство можно разделить на $\Delta y \neq 0$ и перейти к пределу при $\Delta y \to 0$. Тогда получим

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta y} = 1,$$

т.е.

$$\frac{dC}{dy} + \frac{dS}{dy} = 1.$$

Полученные производные $\frac{dC}{dy}$ и $\frac{dS}{dy}$ называются соответственно *предельной склонностью к потреблению* и *предельной склонностью к сбережению*.

18.64. Функция потребления некоторой страны имеет вид

$$C(y) = 7 + 0{,}24y + 0{,}36y^{\frac{4}{5}},$$

где y — совокупный национальный доход.

Найти а) предельную склонность к потреблению и б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 243.

18.65. Найти предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 15 млрд., а функция потребления имеет следующий вид:

а) $C(y) = 10 + 0{,}47y + 0{,}36y^{\frac{3}{4}}$;

б) $C(y) = 11 + 0{,}36y + 0{,}14y^{\frac{4}{5}}$.

Модель №6

Издержки хранения. Совокупные издержки производства товара состоят из издержек его производства и издержек хранения. Пусть товар завозится на склад партиями по x штук в одной партии, а расходуется с постоянной скоростью. Тогда наполняемость склада зависит от времени t и задается функцией, график которой приведен на рис. 18.7. Здесь V — число единиц товара на складе, $\frac{x}{2}$ — средняя наполняемость склада, t_0 — время использования партии товара.

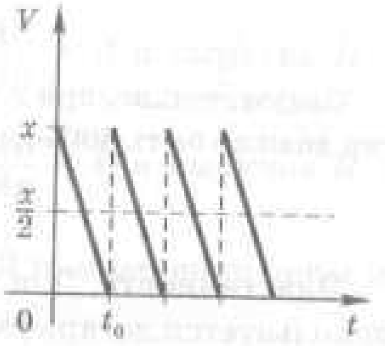

Рис. 18.7

18.35. Компании требуется произвести 1000 единиц некоторого товара в год. Издержки подготовки производства одной партии составляют 320 руб. Издержки производства товара составляют 8 руб. за единицу продукции, а издержки хранения — 1 руб. за единицу. Найти такое число единиц товара в партии x, при котором совокупные издержки производства и хранения были бы минимальны.

Решение. Издержки производства составляют

$$\frac{1000}{x} \cdot 320 + 1000 \cdot 8,$$

где $\frac{1000}{x}$ — число партий товара за год.

Издержки хранения равны $\frac{x}{2} \cdot 1$. Таким образом, совокупные издержки составляют

$$\frac{320\,000}{x} + 8000 + \frac{x}{2}.$$

Находим минимальное значение:

$$C'(x) = -\frac{320\,000}{x^2} + \frac{1}{2}$$

$$C'(x) = 0$$

$$-\frac{320\,000}{x^2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$x = 800.$$

Далее определяем

$$C''(x) = \frac{640\,000}{x^3}$$

$$C''(800) = \frac{640\,000}{800^3} > 0.$$

Следовательно, при $x = 800$ функция имеет минимум. Таким образом, в партии должно быть 800 единиц товара.

18.66. Компании нужно произвести 15 тыс. единиц товара в год. Подготовка к производству одной партии составляет 150 руб. Производство одной единицы товара обходится в 7 руб., а издержки хранения составляют 0,5 руб. за единицу товара в год. Найти число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

18.67. Компания нашла покупателя, согласного покупать у нее 20 тыс. единиц некоторого товара в год. Подготовка к производству одной партии составляет 30 руб. Производство одной единицы товара обходится в 9 руб., а издержки хранения составляют 0,3 руб. за единицу товара в год. Найти число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

18.68. Компания должна произвести 96 тыс. единиц продукции в год. Издержки подготовки к производству одной партии составляют 1500 руб., а издержки производства одной единицы продукции — 10 руб. Хранение обходится в 0,5 руб. за единицу товара в год. Найти число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

18.69. Компания должна произвести 300 тыс. единиц продукции в год. Издержки подготовки к производству одной партии составляют 720 руб., а издержки производства одной единицы продукции — 7 руб. Хранение обходится в 3 руб. за единицу товара в год. Найти число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

Модель №7

Эластичность. Для упрощения процесса дифференцирования иногда используется логарифмическая производная (производная от логарифма функции)

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx}.$$

С этим понятием связано понятие эластичности функции. *Эластичность* функции η определяется следующим образом:

$$\eta = \frac{x}{y}\,\frac{dy}{dx}.$$

Если независимая переменная x изменится на Δx, функция y получит соответствующее приращение Δy. Процентное изменение x и y равно соответственно $\frac{\Delta x}{x}100\%$ и $\frac{\Delta y}{y}100\%$, при этом $\frac{\Delta y \cdot 100\,x}{y \cdot 100\,\Delta x}$ — отношение процентного изменения функции y к процентному изменению аргумента x.

Если $\Delta x \to 0$, то

$$\frac{\Delta y x}{y \Delta x} \to \frac{x\,dy}{y\,dx} = \eta,$$

т.е. при малых значениях Δx процентное изменение функции приближенно равно эластичности η.

- Если $\eta < -1$, функция эластична.
- Если $-1 < \eta < 0$, функция не эластична.
- Если $\eta = -1$, эластичность функции называется единичной.

В терминах логарифмических производных

$$\eta = \frac{\frac{d}{dx}(\ln y)}{\frac{d}{dx}(\ln x)},$$

т.е. эластичность функции y по x — это отношение логарифмической производной y к логарифмической производной x.

Если известна функция спроса $x = x(p)$, можно найти предельную выручку по отношению к цене p:

$$\frac{dR}{dp} = \frac{d}{dp}(xp) = x + p\frac{dx}{dp} = x\left(1 + \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}\right) = x(1 + \eta).$$

- Если спрос эластичный, то $1 + \eta < 0$, $\frac{dR}{dp} < 0$ и выручка R — убывающая функция цены.
- Если спрос неэластичный, то $1 + \eta > 0$, $\frac{dR}{dp} > 0$ и выручка R — возрастающая функция цены.
- В случае единичной эластичности $1 + \eta = 0$ и изменение цены не вызывает изменение выручки.

18.70. Найти эластичность функции спроса:

а) $p + 5x = 100$ в точке $p = 50$;

б) $3p + 4x = 120$ в точках $p = 15$ и $p = 20$;

в) $p^2 + p + 4x = 40$ в точках $p = 2$ и $p = 4$.

Как увеличение цены повлияет на выручку? При каких значениях p спрос является эластичным?

18.71. Найти эластичность функции спроса $xp = 5$ в точке $p = 10$. Как увеличение цены повлияет на выручку? Какой это тип эластичности?

18.72. Для следующих функций спроса найти значения p, при которых спрос является эластичным:

а) $2p + 3x = 12$;

б) $x = 50(10 - \sqrt{p})$;

в) $p = ax + b \quad (a < 0,\ b > 0)$.

18.73. Функция спроса имеет вид $p = \sqrt{3600 - x^2}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 50$.

б) Посчитать приближенно процентное изменение спроса, если цена выросла на 11%.

18.74. Уравнение спроса имеет вид $p = 20 - 0{,}1\sqrt{x}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 18$.

б) Вычислить приближенно процентное изменение спроса, если цена уменьшилась на 2%.

18.75. Уравнение спроса имеет вид $x = 100\sqrt{4 - p}$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 150 единиц; б) 50 единиц.

18.76. Уравнение спроса имеет вид $(p + 1)\sqrt{x + 1} = 100$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 24 единицы; б) 15 единиц.

18.77. Для следующих функций спроса и предложения найти значение налога на единицу товара, максимизирующее доход государства:

а) $p = -3x + 124$, $p = 2x + 14$; б) $p = 250 - 2x^2$, $p = 700 + 3x$.

18.78. Найти значение налога, максимизирующее доход государства, если функции спроса и предложения имеют вид:

а) $p = 800 - 0{,}5x$, $p = 700 + 2x$; б) $p = 8200 - 5x^2$, $p = 700 + 20x^2$.

18.73. Функция спроса имеет вид $p = \sqrt{3600 - x^2}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 50$.

б) Посчитать приближенно процентное изменение спроса, если цена выросла на 11%.

18.74. Уравнение спроса имеет вид $p = 20 - 0{,}1\sqrt{x}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 18$.

б) Вычислить приближенно процентное изменение спроса, если цена уменьшилась на 2%.

18.75. Уравнение спроса имеет вид $x = 100\sqrt{4 - p}$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 150 единиц; б) 50 единиц.

18.76. Уравнение спроса имеет вид $(p + 1)\sqrt{x + 1} = 100$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 24 единицы; б) 15 единиц.

Модель №8

Задача максимизации дохода. При определении максимально возможного дохода государства от сбора налогов находится экстремум функции.

18.36. Законы спроса и предложения имеют следующий вид:

$$p = -3x + 12,$$
$$p = 2x + 2.$$

Найти величину налога t, при которой доход государства будет максимален.

Решение. После введения налога t имеем систему

$$\begin{cases} p_c = -3x + 12, \\ p_s = 2x + 2, \\ p_c = p_s + t. \end{cases}$$

Выражаем t через x и подставляем в функцию T, определяющую доход государства:

$$-3x + 12 = 2x + 2 + t$$
$$t = 10 - 5x$$
$$T = xt = x(10 - 5x) = 10x - 5x^2.$$

Находим максимум функции T:

$$T' = 10 - 10x = 0$$
$$x = 1$$
$$T'' = -10 < 0,$$

следовательно, $x = 1$ — точка максимума.

В точке $x = 1$ находим $t = 5$, $T = 5$. Следовательно, доход государства максимален при $t = 5$.

18.77. Для следующих функций спроса и предложения найти значение налога на единицу товара, максимизирующее доход государства:

а) $p = -3x + 124,$ б) $p = 250 - 2x^2,$
$p = 2x + 14;$ $p = 700 + 3x.$

18.78. Найти значение налога, максимизирующее доход государства, если функции спроса и предложения имеют вид:

а) $p = 800 - 0{,}5x,$ б) $p = 8200 - 5x^2,$
$p = 700 + 2x;$ $p = 700 + 20x^2.$