Модель №9

18.3. Применение интегрального исчисления

Интегрирование используется для нахождения функций издержек, прибыли, потребления, если известны соответственно функции предельных издержек, предельной прибыли и т.д. Для определения произвольной постоянной интегрирования необходимо дополнительное условие. Если находится функция издержек, используется то, что ее значение в точке $x = 0$ (x — число единиц произвольной продукции) равно значению фиксированных издержек, а при определении функции дохода — то, что ее значение в точке $x = 0$ равно нулю (доход равен нулю, если не продано ни одного изделия).

18.79. Задана функция предельного дохода

$$R'(x) = 20 - 0{,}04x.$$

Найти функцию дохода и закон спроса на продукцию.

Решение.

$$R(x) = \int(20 - 0{,}04x)\mathrm{d}x = 20x - 0{,}04\frac{x^2}{2} + C = 20x - 0{,}02x^2 + C,$$

$$R(0) = 0, \text{ следовательно, } C = 0,$$

$$R(x) = 20x - 0{,}02x^2.$$

Если каждая единица продукции продается по цене p, то доход определяется формулой $R = xp$. Следовательно, деля на x функцию дохода, находим закон спроса $p(x)$:

$$p = 20 - 0{,}02x.$$

18.83. Функция предельных издержек имеет вид

$$C'(x) = 50 + 0{,}02x.$$

а) Найти функцию издержек, если фиксированные издержки составляют 2500 руб. в месяц.

б) Каковы издержки производства 250 изделий в месяц?

в) Если продукция продается по цене 75 руб. за изделие, сколько нужно произвести и продать, чтобы прибыль была максимальной?

18.84. Функция предельных издержек некоторого предприятия имеет вид

$$C'(x) = 60 - 0{,}04x + 0{,}003x^2.$$

а) Найти функцию издержек, если издержки производства 100 единиц продукции составляют 7 тыс. руб.

б) Найти фиксированные издержки.

в) Каковы издержки производства 250 единиц продукции?

г) Если цена составляет 65,5 руб. за единицу продукции, найти максимальное значение прибыли.

18.85. Функция предельных издержек имеет вид

$$C'(x) = 60 + 0{,}04x.$$

Фиксированные издержки составляют 1800 руб. в месяц, а цена одного изделия равна 80 руб.

а) Найти переменные издержки.

б) Каковы издержки производства 150 изделий?

в) Найти приращение прибыли, если объем производства вырос со 150 до 200 изделий.

18.86. Функция предельного дохода некоторого предприятия имеет вид

а) $R'(x) = 20 - 0{,}02x$; б) $R'(x) = 45 - 0{,}04x - 0{,}003x^2$.

Найти функцию дохода. Каково уравнение спроса?

18.87. Функция предельной прибыли имеет вид

$$P'(x) = 25 - 0{,}004x.$$

Прибыль предприятия составляет 35,8 тыс. руб., если продано 1200 изделий. Найти функцию прибыли.

18.88. Функция предельных издержек некоторой продукции имеет вид

$$C'(x) = 30x\mathrm{e}^{0{,}001x^2}.$$

Найти функцию издержек, если фиксированные издержки составляют 20 тыс. руб.

18.89. Функция предельного дохода имеет вид

а) $R'(x) = 25 - 0{,}4x - 0{,}06x^2$;

б) $R'(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3 + 900}}$;

в) $R'(x) = (5 - x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$.

Найти функцию дохода. Найти закон спроса на продукцию.

18.90. Найти функцию потребления, если потребление равно 6 млрд. руб., когда доход равен нулю, а функция предельной склонности к потреблению имеет следующий вид:

а) $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = 0{,}5 + \dfrac{0{,}2}{\sqrt{y}}$;

б) $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{\sqrt{3y + 4}} + 0{,}4$;

в) $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = 0{,}6 - \mathrm{e}^{-3y}$.

18.91. Найти функцию потребления, если потребление равно 4 млрд. руб., когда доход равен нулю, а функция предельной склонности к сбережению имеет следующий вид:

а) $\frac{dS}{dy} = 0{,}37$;

б) $\frac{dS}{dy} = 0{,}4 - \frac{1}{\sqrt{2y+9}}$;

в) $\frac{dS}{dy} = 0{,}3 + e^{-1{,}6y}$.

Модель №10

Коэффициент неравномерности распределения дохода. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где y — это доля совокупного дохода, получаемая частью x наиболее низко оплачиваемого населения. Например, $y(0{,}8) = 0{,}6$ означает, что 80% наиболее низко оплачиваемого населения получают 60% совокупного дохода. Очевидно, что $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $y \leqslant x$. Предположим, что нет населения с нулевым доходом, т.е. $y(0) = 0$, и весь доход получается всей совокупностью населения, т.е. $y(1) = 1$.

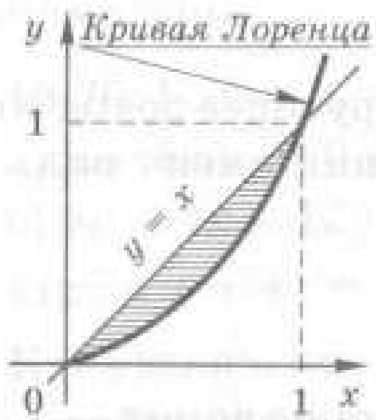

Рис. 18.8

На рис. 18.8 показан пример графика функции $y = f(x)$. Эта кривая называется *кривой Лоренца*. Если бы распределение доходов было совершенным, то 10% населения получали бы 10% совокупного дохода, 20% населения — 20% дохода и т.д. Тогда кривой распределения доходов была бы прямая $y = x$. Отклонение реального распределения доходов от идеального измеряется отношением L площади между прямой $y = x$ и кривой Лоренца к площади, ограниченной прямыми $y = x$, $x = 1$ и осью x, и называется *коэффициентом неравномерности распределения доходов*.

Очевидно, что $0 \leqslant L \leqslant 1$. Значение $L = 0$ соответствует совершенному распределению доходов.

18.92. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца:

а) $y = \frac{11}{12}x^2 + \frac{1}{12}x$; б) $y = \frac{9}{10}x^2 + \frac{1}{10}x$.

Какую часть дохода получают 12% наиболее низко оплачиваемого населения? Посчитать коэффициент неравномерности распределения совокупного дохода.

18.93. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца:

а) $y = 0{,}87x^2 + 0{,}13x$; б) $y = 0{,}96x^2 + 0{,}04x$.

Какую часть дохода получают 8% наиболее низко оплачиваемого населения? Посчитать коэффициент неравномерности распределения совокупного дохода.

Модель №11

Кривая обучения. Часто необходимо оценить, сколько времени потребуется для производства некоторого дополнительного количества продукции. Для подобных расчетов пользуются так называемой кривой обучения.

Пусть $T = F(x)$ — время, измеряемое в человеко-часах, необходимое для производства первых x единиц продукции. Тогда $f(x) = F'(x)$ приближенно равно времени, необходимому для производства $(x+1)$-й единицы продукции. Обычно используют функции вида

$$f(x) = ax^b,$$

где $a > 0, \quad -1 \leqslant b < 0.$

График функции такого вида изображен на рис. 18.9 и называется *кривой обучения*.

Функция $f(x)$ — убывающая, так как время, необходимое для выполнения некоторой операции, убывает при возрастании числа повторов.

Время ΔT, необходимое для производства единиц продукции с номерами от (n_1+1) до n_2, определяется формулой

$$\Delta T = \int_{n_1}^{n_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

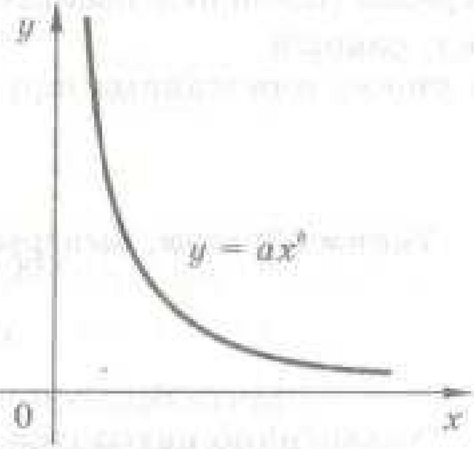

Рис. 18.9

18.80. После сборки 100 часов оказалось, что в дальнейшем время убывает в соответствии с формулой $y = 15x^{-0,14}$. Найти время, которое потребуется для сборки еще 20 часов (т.е. с номера 101 до номера 120).

Решение.

$$\Delta T = \int_{100}^{120} 15x^{-0,14}\mathrm{d}x = \left.\frac{15x^{0,86}}{0,86}\right|_{100}^{120} = \frac{1500}{86}(120^{0,86} - 100^{0,86}) = 8,91.$$

18.94. После покраски первых 30 автобусов было обнаружено, что кривая обучения имеет вид

$$y = 20x^{-0,312}.$$

Сколько времени потребуется для покраски следующих 50 автобусов?

18.95. Для сборки первых 50 CD-плейеров (1 единица продукции) понадобилось 70 человеко-часов. В последующем для сборки любой единицы продукции — 50 плейеров — требовалось меньше времени в соответствии с формулой обучения

$$f(x) = 70x^{-0,24}.$$

Найти время, которое потребовалось для производства 5 единиц продукции (250 CD-плейеров) после того, как 2 единицы были уже произведены.

18.96. После производства 100 изделий (1 единицы продукции), для которого потребовалось 30 ч, оказалось, что в дальнейшем требуемое время убывает в соответствии с формулой

$$f(x) = 30x^{-0,14}.$$

Сколько времени потребуется для производства 400 изделий после того, как 500 будет уже произведено?

Модель №12

Выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков. Пусть $p = f(x)$ — кривая спроса D на некоторый товар и $p = g(x)$ — кривая предложения S; $(x_0,\ p_0)$ — точка рыночного равновесия (рис. 18.10).

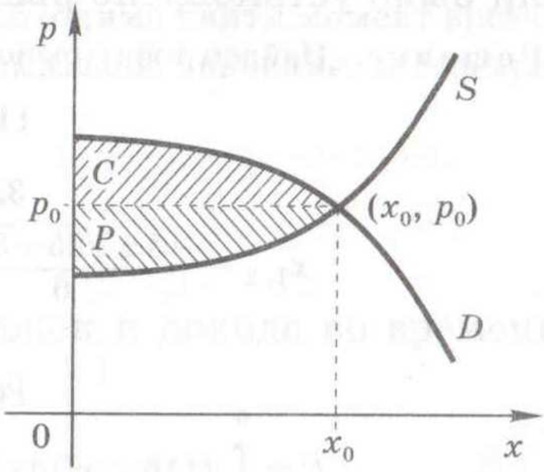

Рис. 18.10

Некоторые потребители могут заплатить за этот товар цену $p > p_0$. Найдем выигрыш потребителей от установленной цены p_0. Разобьем отрезок $[0,\ x_0]$ на n частей и обозначим точки разбиения

$$0 = \bar{x}_0, \quad \bar{x}_1, \ \ldots, \ \bar{x}_{i-1}, \quad \bar{x}_i, \ \ldots, \ \bar{x}_n = x_0.$$

На каждом интервале выберем точку $x_i^* \in [\bar{x}_{i-1},\ \bar{x}_i]$. Выигрыш потребителей на этом отрезке равен

$$(p(x_i^*) - p_0)\,\Delta x_i, \qquad \text{где} \qquad \Delta x_i = \bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}.$$

Суммируя все выигрыши, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} (p(x_i^*) - p_0)\Delta x_i.$$

Если функция спроса непрерывна и $n \to \infty$, а длина максимального отрезка разбиения $\max|\Delta x_i| \to 0$, то эта интегральная сумма имеет предел, равный

$$\int_0^{x_0} (f(x) - p_0)\mathrm{d}x.$$

Таким образом, *выигрыш потребителей*

$$C = \int_0^{x_0} f(x)\mathrm{d}x - p_0 x_0.$$

Аналогично находится *выигрыш поставщиков*:

$$P = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\mathrm{d}x.$$

Очевидно, что выигрыш потребителей равен площади, заключенной между кривой спроса D и прямой $p = p_0$. Выигрыш поставщиков равен площади, заключенной между прямой $p = p_0$ и кривой предложения S (см. рис. 18.10).

18.81. Известны законы спроса и предложения:

$$p = 116 - x^2,$$

$$p = \frac{5}{3}x + 20.$$

Найти выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков, если было установлено рыночное равновесие.

Решение. Найдем точку рыночного равновесия:

$$116 - x^2 = \frac{5}{3}x + 20$$

$$3x^2 + 5x - 288 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 3456}}{6}, \text{ откуда } x_1 = 9; \quad x_2 = -\frac{32}{3}$$

$$x_0 = 9, \quad p_0 = 35$$

$$p_0 x_0 = 35 \cdot 9 = 315$$

$$C = \int_0^9 (116 - x^2)\mathrm{d}x - 315 = \left(116x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^9 - 315 = 486$$

$$P = 315 - \int_0^9 \left(\frac{5}{3}x + 20\right)\mathrm{d}x = 315 - \left(\frac{5}{3}\,\frac{x^2}{2} + 20x\right)\Bigg|_0^9 = 315 - \frac{5}{6}\cdot 81 - 180 = 67{,}5.$$

лии после того, как ...

18.97. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид

$$p = 112 - x^2.$$

Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 90.

18.98. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид

$$p = \frac{150}{2x+5}.$$

Найти выигрыш потребителей, если равновесное количество товара равно 10.

18.99. Найти выигрыш потребителей и поставщиков товара, законы спроса и предложения на который имеют следующий вид:

а) $p = 89 - x^2, \quad 10x - 7p + 210 = 0;$

б) $5p + 2x = 50, \quad 5p - 6x = 10;$

в) $p = 44 - x^2, \quad p = x^2 + 2x + 20;$

г) $p = \dfrac{120}{x+2}, \quad p = \dfrac{5}{2}x + 10.$

18.100. Функция совокупных издержек монополии и уравнение спроса на этот товар имеют следующий вид:

а) $C(x) = 900 + 40x + 5x^2,$ $\quad p = 280 - 4x - 2x^2;$

б) $C(x) = 400 + 30x + x^2,$ $\quad p = -\dfrac{1}{3}x^2 - 3x + 50.$

Найти выигрыш потребителей в точке, где монополия имеет максимальную прибыль.

Модель №13

Среднее значение. Среднее значение непрерывной функции на промежутке $[a, b]$ находится по формуле

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Среднее значение функции используется при вычислении налога на имущество предприятия. Величина налога

$$N = kf(c) = k\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

где k — коэффициент, зависящий от вида предприятия;

$f(c)$ — среднее значение стоимости имущества за год;

$[a, b]$ — промежуток времени, равный году.

Интеграл вычисляется приближенно по формуле трапеций с разбиением года на 12 месяцев:

$$N = \frac{k}{12}\left(\frac{f(0)+f(12)}{2} + f(1) + f(2) + \ldots + f(11)\right),$$

где $f(0)$ — стоимость имущества на 1 января;

$f(1)$ — стоимость имущества на 1 февраля;

...

$f(11)$ — стоимость имущества на 1 декабря;

$f(12)$ — стоимость имущества на 1 января следующего года.

Задача максимизации прибыли. В ряде отраслей промышленности, например в горнодобывающей, после некоторого момента времени прибыль начинает убывать. В этом случае необходимо найти момент времени, в который прибыль принимает максимальное значение, и своевременно остановить производство.

18.82. Скорости изменения издержек и дохода во времени имеют следующий вид:

$$C'(t) = 2 + t,$$
$$R'(t) = 17 - 2t.$$

Найти максимальное значение прибыли, которое можно получить от этого производства. Когда производство следует остановить?

Решение.

$$P'(t) = R'(t) - C'(t) = 17 - 2t - 2 - t = 15 - 3t$$

$$P'(t) = 0 \quad \text{при} \quad t = 5$$

$$P''(5) = -3 < 0, \text{ следовательно, } t = 5 \text{ — точка максимума.}$$

$$P(5) = \int_0^5 P'(t)\mathrm{d}t = \int_0^5 (15 - 3t)\mathrm{d}t = \left(15t - 3\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^5 = 75 - \frac{3}{2} \cdot 25 = \frac{75}{2}.$$

Изменение капитала. Если $I(t)$ — скорость изменения инвестиций, а $A(t)$ — капитал предприятия, то

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}.$$

Зная скорость изменения инвестиций, можно найти изменение капитала по формуле

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\mathrm{d}t.$$

максимальную при

18.101. Уравнение спроса на некоторую продукцию имеет вид

$$p = 30 - 0{,}02x.$$

Найти среднее значение дохода, если объем продаж возрос с 80 до 150 единиц.

18.102. Функция совокупных издержек производства некоторой продукции имеет вид

$$C(x) = 1000 + 2x + 0{,}04x^2.$$

Найти среднее значение издержек при изменении объема производства от 100 до 200 единиц.

18.103. Кривая обучения при покраске автомобилей имеет вид

$$f(x) = 10x^{-0{,}312},$$

где $f(x)$ — число человеко-часов, необходимое для покраски $(x + 1)$-го автомобиля. Найти среднее значение времени, необходимое для покраски автомобиля, если:

а) было покрашено 100 первых автомобилей;

б) были покрашены автомобили с номерами 401—500.

18.104. Посчитать, какой налог на имущество должно заплатить предприятие, если $k = 2\%$, а стоимость имущества (сумма соответствующих счетов баланса) составляла на первое число каждого месяца:

Месяц	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
Млн. руб.	3,5	2,8	4,1	5,2	6,1	3,8	2,6	6,2	7,4	5,1	2,5	3,8	4,6

18.105. Посчитать, какой налог на имущество должно заплатить предприятие, если $k = 1{,}5\%$, а стоимость имущества на начало каждого квартала составляла:

Дата	1.01	1.04	1.07	1.10	1.01
Млн. руб.	11,2	9,8	4,5	10,8	7,6

18.106. Предприятие выпускает видеоаппаратуру. Его доход задается функцией

$$R(t) = 40e^{0{,}25t}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 10.$$

Найти среднее значение дохода на промежутке [0, 10].

18.107. Сколько лет нужно продолжать добычу полезных ископаемых до достижения максимального значения прибыли, если скорость изменения издержек и дохода имеет следующий вид:

а) $C'(t) = 3 + 2t, \qquad R'(t) = 28 - 3t;$

б) $C'(t) = 10 + 3t^{\frac{2}{3}}, \qquad R'(t) = 46 - t^{\frac{2}{3}};$

в) $C'(t) = 22 + 4t^{\frac{4}{5}}, \qquad R'(t) = 134 - 3t^{\frac{4}{5}}.$

Найти максимальное значение прибыли.

18.108. Найти прирост капитала предприятия на данном промежутке времени, если скорость изменения инвестиций имеет следующий вид:

а) $I(t) = 10 + 2\sqrt{t}, \quad 9 \leqslant t \leqslant 16;$

б) $I(t) = 2 + \sqrt[5]{t^3}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$

18.109. Доход от инвестиций в некоторое производство равен нулю в течение первого года, а затем изменяется по закону

$$R(t) = 10e^{-0.2(t-1)},$$

где t — время в годах. Найти среднее значение дохода от инвестиций в течение первых 5 лет.