Тема 3. Функции нескольких переменных

Образцы решения задач

Задача 1. Исследовать на экстремум функцию $z=6x-x^2-xy-y^2-4$ и вычислить значение функции в точке экстремума.

Решение. Для того чтобы исследовать данную функцию $z=f(x,y)$ на экстремум, необходимо найти частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Если в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю или не существуют.

Точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют, называются критическими.

Найденные частные производные приравниваем к нулю и решаем полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0,\end{cases} \quad \text{так как} \quad \begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=6-2x-y;\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-x-2y,\end{cases} \quad , \quad \text{то}$$

решаем систему

$$\begin{cases}6-2x-y=0\\ -x-2y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6-2x-y=0\\ x=-2y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6-+4y-y=0\\ x=-2y\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}6+3y=0\\ x=-2y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_0=-2\\ x_0=4\end{cases}$$

Данная функция имеет только одну критическую точку $M_0(4,-2)$.

Как и в случае одной переменной не во всякой критической точке обеспечен экстремум.

Теперь найдем частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и вычислим их значения в критической точке.

Введем обозначения: $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_0}$; $B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{M_0}$; $C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$.

Составим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2$.

Если $\Delta > 0$ в исследуемой критической точке $M_0(x_0, y_0)$, то функция $f(x,y)$ в этой точке имеет экстремум, а именно при $A < 0$ максимум, при $A > 0$ минимум. Если $\Delta < 0$, то в исследуемой точке нет экстремума. Если $\Delta = 0$, то вопрос остается открытым.

Найдем частные производные второго порядка

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$.

Имеем $A = -2$; $B = -1$; $C = -2$.

$$\Delta = A \cdot C - B^2 = (-2)(-2) - (-1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A < 0$ то в точке $M_0(4,-2)$ данная функция имеет максимум.

Вычислим значение функции в точке максимума

$$z_{\max} = f(4;-2) = 6 \cdot 4 - 4^2 - 4 \cdot (-2) - (-2)^2 - 4 =$$
$$= 24 - 16 + 8 - 4 - 4 = 8$$

Задача 2. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $3xy^2 - 2yz + 4xz - 4 = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если $x_0 = -1, y_0 = 2$. Вычислить значение аппликаты z_1 точки $M_1(3;1;z_1)$, лежащей на этой касательной плоскости.

Решение. Определим аппликату z_0 точки касания. Для этого подставляем значения x_0 и y_0 в данное уравнение поверхности

$$3\cdot(-1)\cdot 2^2 - 2\cdot 2\cdot z_0 + 4(-1)\cdot z_0 - 4 = 0$$

$$-12 - 4z_0 - 4z_0 - 4 = 0, \qquad -8z_0 = 16, \qquad z_0 = -2$$

Точка касания $M_0(-1;2;-2)$

Наша поверхность задана неявным уравнением. Уравнение касательной плоскости, проведенной к поверхности $F(x,y,z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

$$F'_x(M_0)\cdot(x - x_0) + F'_y(M_0)\cdot(y - y_0) + F'_z(M_0)\cdot(z - z_0) = 0$$

Найдем частные производные F'_x, F'_y F'_z и вычислим их значение в точке касания $M_0(-1;2;-2)$:

$$F'_x = 3y^2 + 4z,\ F'_y = 6xy - 2z,\ F'_z = -2y + 4x$$

$$F'_x(M_0) = 3\cdot 2^2 + 4(-2) = 4,$$

$$F'_y(M_0) = 6\cdot(-1)\cdot 2 - 2\cdot(-2) = -8,$$

$$F'_z(M_0) = -2\cdot 2 + 4\cdot(-1) = -8.$$

Подставим значения частных производных в уравнение касательной:

$4\cdot(x+1)-8\cdot(y-2)-8\cdot(z+2)=0$
$4x+4-8y+16-8z-16=0$
$4x-8y-8z+4=0$
сократив на 4, получим уравнение касательной плоскости $x-2y-2z+1=0$.

Точка $M_1(3;1;z_1)$ лежит на касательной плоскости. Следовательно, координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению касательной плоскости.

Подставив их в последнее уравнение, найдем z_1:
$3-2\cdot1-2\cdot z_1+1=0$, $-2z_1+2=0$, $z_1=1$.

Замечание: Если поверхность задана явным уравнением $z=f(x,y)$, то уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$z-z_0=z_x'(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+z_y'(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Задачи для самостоятельной работы

301 – 310. Исследовать данную функцию $z=f(x,y)$ на экстремум и вычислить значение функции в точках экстремума:

301. $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$,

302. $z=x^2-xy+y^2+x+y+4$,

303. $z=3xy-x^2-3y^2-6x+9y+2$,

304. $z=x^2+xy+y^2-13x-11y+17$,

305. $z=x^2+xy+y^2+4x-y+5$,

306. $z=3x^2+5xy+3y^2+4x+7y+1$,

307. $z=2x^2-3xy+2y^2-9x+12y+10$,

308. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 + x + 3$,

309. $z = 5 + 4x + 10y - 4xy - 2x^2 - 3y^2$,

310. $z = 1 - x + y - 5xy - 3x^2 - 3y^2$

311 – 320. Дано уравнение поверхности в виде $F(x, y, z) = 0$ или $z = f(x, y)$. Требуется составить уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если абсцисса x_0 и ордината y_0 заданы. Найти также аппликату z_1 точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, лежащей на этой касательной плоскости, если даны абсцисса x_1 и ордината y_1 точки M_1:

311. $3x^2y + 2xz - yz + x + 1 = 0$, $M_0(1; -2; z_0), M_1(1; 0; z_1)$.

312. $2xy^2 - x^2z + 2yz + 2y + 4 = 0$, $M_0(-1; 1; z_0), M_1(2; 1; z_1)$.

313. $x^2z - 2xy^2 + 2yz + y + 1 = 0$, $M_0(2; -1; z_0), M_1(0; 1; z_1)$.

314. $xyz + x^2z - 2x - y + 3 = 0$, $M_0(-2; 3; z_0), M_1\left(\frac{1}{2}; 1; z_1\right)$.

315. $x^2y^2 + 2xyz - 4yz - 5x = 0$, $M_0(3; -1; z_0), M_1(1; -1; z_1)$.

316. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$, $M_0(2; 1; z_0), M_1\left(\frac{1}{2}; 0; z_1\right)$.

317. $z = xy + 2y^2 - 2x$, $M_0(1; 2; z_0), M_1(-1; 1; z_1)$.

318. $z = 2x^2 + y^2 + 3y$, $M_0(2; -2; z_0), M_1(1; 0; z_1)$.

319. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$, $M_0(1; 2; z_0), M_1(0; 1; z_1)$.

320. $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$, $M_0(2; 4; z_0), M_1(3; 2; z_1)$.