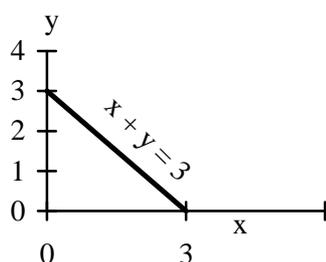


Тема 6. Кратные интегралы

Задача 1. Вычислить при помощи двойного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

$$z = 4x^2 + 2y^2 + 1, \quad x + y - 3 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Решение. Вначале найдем проекцию тела на плоскость xOy .



Плоскость $x + y - 3 = 0$ параллельная оси Oz , другие поверхности $x = 0, y = 0, z = 0$ являются координатными плоскостями.

Заданное тело ограничено сверху эллиптическим параболоидом $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$.

Из самого определения двойного интеграла вытекает, что двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ равен объему

цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу областью D на плоскости xOy , а с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz и проходят через границу области D :

$$V = \iint_D (4x^2 + 2y^2 + 1) dx dy. \text{ Вычислим этот интеграл.}$$

В области D y изменяется от 0 до 3, а x изменяется от $x=0$ до $x=3-y$.

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^3 dy \int_0^{3-y} (4x^2 + 2y^2 + 1) dx = \int_0^3 dy \left[\frac{4}{3} x^3 + 2y^2 x + x \right]_0^{3-y} = \\
 &= \int_0^3 \left[\frac{4}{3} (3-y)^3 + 2y^2 (3-y) + (3-y) - 0 \right] dy = \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^3 (3-y)^3 dy + \int_0^3 (6y^2 - 2y^3 + 3 - y) dy = \\
 &= -\frac{4}{3} \int_0^3 (3-y)^3 d(3-y) + \left(6 \cdot \frac{y^3}{3} - 2 \frac{y^4}{4} + 3y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \\
 &= -\frac{4}{3} \frac{(3-y)^4}{4} \Big|_0^3 + \left(2y^3 - \frac{y^4}{2} + 3y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \\
 &= 0 + \frac{4}{3} \cdot \frac{3^4}{4} + 2 \cdot 3^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^4 + 3 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} = \\
 &= 27 + 54 - \frac{81}{2} + 9 - \frac{9}{2} = 45 \text{ (куб. ед.)}
 \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельной работы

601 – 610. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Область интегрирования изобразить на чертеже.

601. $z = 2x + y$, $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

602. $z = x^2 + 3y^2$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

603. $z = 8 - x^2 - 2y^2$, $y = 2 - 2x$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

604. $z = 4 - y^2$, $x = 4 - 2y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

605. $z = 3x^2 + 3y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

606. $z = 3y^2, x = 2, x = 0, y = 1, z = 0.$

607. $z = x^2 + y^2, x = 2 - 2y, x = 0, y = 0, z = 0.$

608. $z = 2x^2 + 3y^2, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

609. $z = 6 - x - y, 2x + y = 4, x = 0, y = 0, z = 0.$

610. $z = x^2 + 1, 4x + 3y - 12 = 0, x = 0, y = 0, z = 0.$