Тема 1. Пределы последовательностей и функций

Литература [1], глава 6.

Важнейшими понятиями этой темы являются понятия предела последовательности, предела функции, непрерывности функции. Рассмотрим решения некоторых задач на вычисление пределов (не используя правило Лопиталя) при этом при вычислении пределов будем руководствоваться схемой:

1.Если нужно вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$***, где*** a ***является константой, причём*** $a \neq 0$***, то следует сделать замену*** $x = a + t$***, где*** $t \to 0$ ***и перейти к вычислению предела*** $\lim\limits_{t\to 0} f(a+t)$.
2. Если в функцию $f(x)$***, стоящую под знаком предела, входит сумма*** $u+v$ ***и эта сумма не возводится в растущую степень, то эту сумму можно заменить на главное слагаемое, при этом слагаемое*** u ***является главным, если*** $\frac{v}{u} \to 0$***, при*** $x \to a$***.***
3. Под знаком предела при $\alpha \to 0$ ***можно выполнять замены:*** $\sin\alpha \sim \alpha,\ tg\alpha \sim \alpha, \arcsin\alpha \sim \alpha, arctg\alpha \sim \alpha, \cos\alpha \sim 1 - \frac{\alpha^2}{2},$ $e^{\alpha} \sim 1+\alpha, \ln(1+\alpha) \sim \alpha, (1+\alpha)^r \sim 1 + r\alpha$ ***где*** $r \in R$***. При выполнении замен нельзя получать точный ноль.***

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+x}+\sqrt[3]{27x^6+2}}{3x^2-x+2}$.

Решение. В этом примере ни числитель, ни знаменатель не имеют предела, поскольку они являются бесконечно большими последовательностями, в таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, сделаем следующие преобразования:
в соответствии с пунктом 2 вышеуказанной схемы заменим каждую сумму на главное слагаемое, а при $x\to\infty$ слагаемое будет главным, если его степень больше. Тогда получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^6+x}+\sqrt[3]{27x^6+2}}{3x^2-x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{3x^2}=\frac{4}{3}.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{9+2x}}{3x^2+10x-8}$.

Решение. Функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{9+2x}}{3x^2+10x-8}$ является элементарной, но точка $x_0=-4$ не принадлежит области определения, так как числитель и знаменатель обращаются в нуль при $x=-4$, в таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, сделаем следующие преобразования:
в соответствии с пунктом 1 вышеуказанной схемы сделаем замену $x=-4+t$, $t\to 0$ и проделаем простейшие преобразования, получим

$$\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{9+2x}}{3x^2+10x-8}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{5-4+t}-\sqrt{9+2(-4+t)}}{3(-4+t)^2+10(-4+t)-8}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1+2t}}{48-24t+3t^2-40+10t-8}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1+2t}}{-14t+3t^2}$$

Для вычисления получившегося предела в соответствии с пунктом 3 вышеуказанной схемы сделаем замену: $\sqrt{1+t} \sim 1+\frac{1}{2}t$; $\sqrt{1+2t} \sim 1+t$; в соответствии с пунктом 2 вышеуказанной схемы заменим сумму $3t^2-14t$ на главное слагаемое, а при $t \to 0$ слагаемое будет главным, если его степень меньше, то есть $3t^2-14t \sim -14t$. Тогда получаем:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1+2t}}{-14t+3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}t-1-t}{-14t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t}{-14t}=\frac{1}{28}$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x\sin x}-1}{1-\cos 4x}$.

Решение. Функция $\frac{e^{3x\sin x}-1}{1-\cos 4x}$ является элементарной, но в точке $x_0=0$ она не определена, поскольку числитель и знаменатель обращаются в нуль при $x=0$, т.е. имеет место неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Найдем предел этой функции в соответствии с пунктом 3 вышеуказанной схемы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x\sin x}-1}{1-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{\frac{(4x)^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 3x^2}{16x^2}=\frac{3}{8}.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{4}}$.

Решение. Данный предел имеет неопределенность вида $\left\{1^{\infty}\right\}$. Для его вычисления воспользуемся логарифмическими формулами и получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{4}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{x+1}{4}\ln\frac{3x-1}{3x+2}} =$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{4}\ln\frac{3x-1}{3x+2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{4}\left(\frac{3x-1}{3x+2}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{4}\cdot\frac{-3}{3x+2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{4}\cdot\frac{-3}{3x}} = e^{-\frac{1}{4}}.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Решение. Числитель и знаменатель данной функции стремятся к нулю при $x\to\dfrac{\pi}{4}$, т. е. имеет место неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Сделаем замену переменных в данной функции. Обозначим $x=\dfrac{\pi}{4}+t$, где $t\to 0$ тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos 2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t-\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2t\right)}{\sin(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{-\sin 2t}{\sin t} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{-2t}{t} = -2$$

Задачи для самостоятельной работы.

101 - 110. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

101. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)^2-(1-2x)^2}{3x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x+3}{\sqrt{x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{tg^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{5x+1}$.

102. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+4x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-x}}{3x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}-1}{3x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{2}{3-x}}$.

103. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-4x+1}{2x^2-7x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{3x}}{\sin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{5-x}-1}{x-4}$.

104. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{\sqrt{x+2}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5x+2}{3x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+2}{7x+3x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{x}{2}}{1-\cos 3x}$.

105. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{4x^2+3x-1}{\sqrt{4x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+x}-x}{\sqrt{2x^4+x^3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tg\,5x}{\sin^2 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(5x-4)^{\frac{3}{x^2-1}}$.

106. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2+2\right)^2+3x^4}{x^4-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4-x}-1}{2x^2-5x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)^{\frac{5}{x-2}}$.

107. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{3x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{4x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{5}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x^2-1}-1}{\sin(x-1)}$.

108. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,2x\cdot\sin 2x}{2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}(3x+4)^{\frac{2}{(x+1)^2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2+2x^3}{(1+x)^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{7x-10-x^2}{\sqrt{6-x}-1}$.

109. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{2x^2+9x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{e^{x+3}-e}{x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2\sin x\right)^{\frac{3}{2x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot\arcsin 2x}$.

110. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-2x^2+x^3}{4+x^2-2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2+x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-4}-1}{1-\sqrt{6-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin 3x\right)^{\frac{x+2}{x}}$.