Тема 7. Ряды

I) При исследовании рядов с положительными членами на сходимость рекомендуется проделать следующие шаги:

1) Если есть такая возможность, то нужно упростить ряд. Для этого следует:

а) каждую сумму заменить на главное слагаемое, т.е. $u+v\approx u$, *если* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v}{u}=0$;

б) воспользоваться таблицей эквивалентных функций, при $\alpha\to 0$ справедливы следующие соотношения :

$$\sin\alpha\approx\alpha;\ \mathrm{tg}\,\alpha\approx\alpha;$$
$$\arcsin\alpha\approx\alpha;\ \mathrm{arctg}\,\alpha\approx\alpha;$$
$$\cos\alpha\approx 1-\frac{\alpha^2}{2};\ e^{\alpha}\approx 1+\alpha;$$
$$\ln(1+\alpha)\approx\alpha;\ (1+\alpha)^r\approx 1+r\cdot\alpha.$$

в) упростить с помощью неравенств. При этом, например, можно воспользоваться неравенствами $|\sin x|\le 1;\quad \ln(1+x)\le x$ для всех $x\ge 0$; $n^{const}<c^n;\quad \ln^{const}n\le n;$ где константа $c>1$ и т.д.

г) мультипликативную константу можно заменить на единицу, т.е. от ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n$ при $k\ne 0$ можно перейти к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

2) Пусть от ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ после упрощения удалось перейти к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, тогда по теореме сравнения получаем, что если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda, \quad \lambda \neq 0$, то с точки зрения сходимости эти ряды устроены одинаково и теперь можно исследовать на сходимость более простой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3) Далее следует воспользоваться одним из достаточных признаков сходимости:

а) проверить является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ рядом вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ для некоторой константы α. Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \leq 1$ расходится;

б) для исследования ряда на сходимость следует выбирать признак Даламбера, если в общий член ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ входит, либо выражение C^n, где C любая допустимая константа, либо факториал $n!$, причём эти вхождения существенные, т.е. от них нельзя избавиться. Тогда, если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, то при $\lambda < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, при $\lambda > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, при $\lambda = 1$ признак Даламбера не даёт ответа на вопрос о том сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

в) для исследования ряда на сходимость следует выбрать признак Коши, если общий член ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет вид $a_n = (\varphi(n))^n$, где $\varphi(n)$- выражение зависящее от n.

Тогда, если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$, то при $\lambda < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, при $\lambda > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, при $\lambda = 1$ признак Коши не даёт ответа на вопрос о том сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

4) Если, после применения достаточных признаков сходимости, не удалось сделать вывод о том сходится или расходится исследуемый ряд, то следует проверить необходимое условие сходимости.

II) Ряды с произвольными членами исследуются только на абсолютную сходимость. При этом от исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ переходят к ряду из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, который исследуют на сходимость как ряд с положительными членами, если при этом будет установлено, что ряд из модулей сходится, то и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ будет сходиться, и в этом случае исходный ряд называется абсолютно сходящимся, а это означает, что с таким рядом можно совершать арифметические операции как с обычными числами.

III) Знакочередующиеся ряды, то есть ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,\ a_n > 0$ исследуются на сходимость по признаку

Лейбница: а) если члены знакочередующиеся ряда монотонно убывают, т.е. для всех n выполняется неравенство $a_n > a_{n+1}$;

б) если общий член ряда стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n > 0$ сходится по признаку Лейбница

IV) Степенные ряды это ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ или вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Для рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ существует такое неотрицательное число R, что для всех x, таких, что $|x| < R$ исходный степенной ряд абсолютно сходится; а для всех x, таких, что $|x| > R$ исходный степенной ряд расходится; а для всех x, таких, что $|x| = R$ нужны дополнительные исследования.

Это число R называется радиусом сходимости степенного ряда.

Радиус сходимости степенного ряда находится по формуле Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$, Интервал $-R < x < R$ называется интервалом сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, а после исследования степенного ряда на сходимость в концевых токах интервала сходимости можно написать область сходимости степенного ряда, т.е. указать все значения x, при которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ сходится.

Пример 1. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n^2+1000}$ на сходимость.

Решение. Для данного ряда общий член имеет вид $a_n=\frac{n-\sqrt{n}}{n^2+1000}$ и общий член ряда содержит операции сложения, значит этот ряд можно упростить, отбросив несущественные слагаемые: в числителе это $\sqrt{n}$, а в знаменателе это 1000.

В результате этих преобразований перейдем к ряду с общим членом $b_n=\frac{1}{n}$.

Воспользуемся теоремой сравнения и получим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\left(n-\sqrt{n}\right)}{n^2+1000}=1\neq 0$, следовательно, с точки зрения сходимости эти ряды устроены одинаково и далее исследуем на сходимость более простой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, где $\alpha=1$, такой ряд расходится, тогда по теореме сравнения и исходный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+1)!}$ на сходимость.

Решение. Для данного ряда общий член имеет вид $a_n=\frac{n}{(2n+1)!}$ и общий член ряда содержит факториал, значит, для исследования этого ряда на сходимость можно воспользоваться признаком Даламбера. Для этого последовательно получаем:

а) $a_n=\frac{n}{(2n+1)!}$; б) $a_{n+1}=\frac{n+1}{(2(n+1)+1)!}=\frac{n+1}{(2n+3)!}$;

в) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{n}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n(2n+3)(2n+2)}=0$, Поскольку полученное значение предела оказалось меньше единицы, т. е. 0<1, то по признаку Даламбера исследуемый ряд сходится.

Пример 3. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n-2}{7n+5}\right)^n$ на сходимость.

Решение. Общий член этого ряда имеет вид, $a_n=\left(\dfrac{3n-2}{7n+5}\right)^n\geq 0$ т.е. имеет вид $a_n=(\varphi(n))^n$, значит, для исследования этого ряда на сходимость можно воспользоваться признаком Коши. Для этого последовательно получаем:

а) $a_n=\left(\dfrac{3n-2}{7n+5}\right)^n$; б) $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(\dfrac{3n-2}{7n+5}\right)^n}=\dfrac{3n-2}{7n+5}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{7n+5}=\dfrac{3}{7}$, Поскольку полученное значение предела оказалось меньше единицы, $\dfrac{3}{7}<1$, то по признаку Коши исследуемый ряд сходится.

Пример 4. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-10)^n}{2^n\sqrt{2n+3}}$.

Решение. Исходный степенной ряд не является рядом вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, для которых выше был описан метод исследования степенных рядов на сходимость. Для того чтобы к исходному ряду применить метод исследования на сходимость выполним замену $t=x-10$ и перейдем к исследованию на сходимость степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^n}{2^n\sqrt{2n+3}}$. Для рядов такого вида существует такое неотрицательное число R, что для всех t, таких, что $|t| < R$ этот степенной ряд абсолютно сходится, а для всех t, таких, что $|t| > R$ этот степенной ряд расходится, и для всех t, таких, что $|t| = R$ нужны дополнительные исследования.

Такое число R называется радиусом сходимости этого степенного ряда.

Радиус сходимости этого степенного ряда находим по формуле Даламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n 2^{n+1}\sqrt{2(n+1)+3}}{2^n\sqrt{2n+3}\cdot(-1)^{n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{2n+5}}{\sqrt{2n+3}} = 2 \ .$$

Значит при всех t, таких, что $|t| < 2$ этот степенной ряд абсолютно сходится, а для всех t, таких, что $|t| > 2$ этот степенной ряд расходится, и для всех t, таких, что $|t| = 2$ нужны дополнительные исследования. Интервал сходимости этого ряда имеет вид, $-2 < t < 2$. Тогда для исходного ряда получаем: что при всех x, таких, что $|x-10| < 2$ исходный степенной ряд сходится, а для всех x, таких, что $|x-10| > 2$ исходный степенной ряд расходится, и для всех x, таких, что $|x-10| = 2$ нужны дополнительные исследования.

Интервал сходимости исходного ряда имеет вид $-2 < x - 10 < 2$, или $8 < x < 12$. Исследуем исходный ряд на сходимость в концевых точках интервала сходимости. Пусть $x = 8$, тогда получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(8-10)^n}{2^n\sqrt{2n+3}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(-2)^n}{2^n\sqrt{2n+3}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}.$$

Это ряд с положительными членами Пусть $x = 12$,тогда получаем знакочередующийся ряд,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(12-10)^n}{2^n\sqrt{2n+3}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{2^n\sqrt{2n+3}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}.$$

Сначала исследуют на сходимость ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$. Упростим этот ряд. Для этого ряда общий член имеет вид $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ и общий член ряда содержит операцию сложения, значит, этот ряд можно упростить, отбросив несущественные слагаемые: в знаменателе это 3, и затем можно заменить мультипликативную константу $\frac{1}{\sqrt{2}}$ на единицу, тогда получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Применим теорему сравнения ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. и найдём при $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ и $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ предел отношения $\frac{a_n}{b_n}$:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$, значит по теореме сравнения с точки зрения сходимости эти ряды устроены одинаково. Ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. это гармонический ряд, где $\alpha=\frac{1}{2}$, такой ряд расходится, но тогда по теореме сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ расходится. Следовательно, в точке $x=8$ исходный степенной ряд расходится. Исследуем теперь на сходимость ряд, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$, который получается из исходного степенного ряда при $x=12$. В силу проведённого исследования этот ряд не имеет абсолютной сходимости т.к. для него ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ расходится. Исследуем этот ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$ на условную сходимость. Применим к этому ряду признак Лейбница: а) это знакочередующийся ряд; б) члены этого ряда монотонно убывают, т.к. при любом n выполняется неравенство $\frac{1}{\sqrt{2n+3}}>\frac{1}{\sqrt{2n+5}}$; в) предел общего члена этого ряда равен нулю $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}=0$. Все условия признака Лейбница выполнены, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$ по признаку Лейбница сходится, а поскольку абсолютной сходимости нет, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$ условно сходится. Таким образом, область сходимости исходного степенного ряда имеет вид $8<x\le 12$, причём в точке $x=12$ исходный степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-10)^n}{2^n\sqrt{2n+3}}$ условно сходится.

Ответ: область сходимости имеет вид $8<x\le 12$.

Задачи для самостоятельной работы.

701 -710. Найти область сходимости ряда:

701) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n+11}$;

702) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$;

703) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{n+4}$;

704) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-7)^n}{\sqrt{3n-1}}$;

705) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+4)^n}{\sqrt[4]{n+5}}$;

706) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-4)^n}{0{,}5n}$;

707) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+7)^n}{2^n\cdot n}$;

708) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+2)^n}{3^n\cdot n}$;

709) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{n+8}$;

710) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+3)^n}{0{,}1n}$.