Глава 1

МНОЖЕСТВА И ОТНОШЕНИЯ

В нашем изложении исходным неопределяемым понятием является понятие множества, описываемое перечислением его свойств. Понятие множества по существу используется в каждой математической дисциплине и позволяет определить последующие понятия математически обоснованно и конструктивно. К ним, в частности, относятся такие основные понятия теории множеств как отношения и специальные виды отношений — отношения эквивалентности и порядка, свойства которых рассматриваются в этой главе. Приводится пример интерпретации отношения порядка, позволяющий сформировать модель прикладной задачи ранжирования и выбора наилучших объектов.

Мы также считаем полезным остановиться в этом разделе на понятии алгебраической операции на множестве. Первоначально ограниченное натуральными числами оно постепенно расширялось и стало применяться к элементам совершенно «нечислового» характера.

1.1. Начальные понятия теории множеств

1.1.1. Понятие множества

Под *множеством* S будем понимать любое собрание определенных и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое. Эти объекты называются *элементами* множества S.

В этом интуитивном определении, принадлежащем немецкому математику Г. Кантору, существенным является то обстоятельство, что собрание предметов само рассматривается как один предмет, мыслится как единое целое. Что касается самих предметов, которые могут входить в множество, то относительно них существует значительная свобода. Это может быть множество студентов, присутствующих на лекции, множество целых чисел, множество точек плоскости, множество всех людей,

живущих на Земле. Заметим, что канторовская формулировка позволяет рассматривать множества, элементы которых по той или иной причине нельзя точно указать (например, множество простых чисел, множество русских воинов, погибших в битве на Куликовом поле, и т. д.).

Символом $\in$ обозначается *отношение принадлежности*. Запись $x \in S$ означает, что элемент x принадлежит множеству S. Если элемент x не принадлежит множеству S, то пишут $x \notin S$.

Г. Кантором сформулировано несколько интуитивных принципов, которые естественно считать выполняющимися для произвольных множеств.

Интуитивный принцип объемности. *Множества A и B считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.*

Записывают $A = B$, если A и B равны, и $A \neq B$ — в противном случае.

Пример 1.1. Проиллюстрируем принцип объемности. Множество A всех положительных четных чисел равно множеству B положительных целых чисел, представимых в виде суммы двух положительных нечетных чисел. Действительно, если $x \in A$, то для некоторого целого положительного числа m $x = 2m$; тогда $x = (2m-1)+1$, т. е. $x \in B$. Если $x \in B$, то для некоторых целых положительных p и q $x = (2p-1)+(2q-1) = 2(p+q-1)$, т. е. $x \in A$.

Множество, элементами которого являются объекты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и только они, обозначают $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Пример 1.2. В силу принципа объемности $\{2, 4, 6\} = \{4, 2, 6\} = \{2, 4, 4, 6\}$; $\{\{1, 2\}\} \neq \{1, 2\}$, так как единственным элементом множества $\{\{1, 2\}\}$ является множество $\{1, 2\}$, а множество $\{1, 2\}$ состоит из двух элементов: чисел 1 и 2.

При рассмотрении способов задания множеств возникает проблема их эффективного описания. Ее решение обычно основано на интуитивном понятии «формы от x». Под *формой от x* будем понимать конечную последовательность, состоящую из слов и символа x, такую, что если каждое вхождение x в эту последовательность заменить одним и тем же именем некоторого предмета соответствующего рода, то в результате получится истинное или ложное предложение. Например, формами от x являются следующие предложения: «3 делит x», «$x^2 = 4$», «$x^2 + 2x + 1 > x$», «x — родственник Иванова». Напротив, предложения «для всех x $x^2 = (x-2)(x+2)$» и «существует такое x, что $x > 0$» не

являются формами от x.

Обозначим форму от x через $P(x)$.

Интуитивный принцип абстракции. *Любая форма $P(x)$ определяет некоторое множество A, а именно множество тех и только тех предметов a, для которых $P(a)$ — истинное предложение.*

Для множества A, определяемого формой $P(x)$, принято обозначение $A = \{x|P(x)\}$.

Пример 1.3.

1. $\{x|x$ — положительное число, меньшее $9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

2. $\{x|x$ — четное число$\}$ — множество четных чисел.

Описанные выше понятия теории множеств с успехом могут быть использованы в началах анализа, алгебры, математической логики и т. д. Однако надо иметь в виду, что при более строгих рассмотрениях такое интуитивное восприятие может оказаться неудовлетворительным.

Несовершенство интуитивных представлений о множествах, их недостаточность иллюстрируются, например, известным парадоксом Б. Рассела. Приведем этот парадокс. Можно указать такие множества, которые принадлежат самим себе как элементы, например множество всех множеств, и такие множества, которые не являются элементами самих себя, например множество $\{1, 2\}$, элементами которого являются числа 1 и 2. Рассмотрим теперь множество A всех таких множеств X, что X не есть элемент X. Тогда, если A не есть элемент A, то, по определению, A также есть и элемент A. С другой стороны, если A есть элемент A, то A — одно из тех множеств X, которые не есть элементы самих себя, т. е. A не есть элемент A. В любом случае A есть элемент A и A не есть элемент A.

Этот парадокс свидетельствует о том, что широко используемая теория множеств в ее интуитивном, «наивном» изложении является противоречивой. Формализация теории множеств, связанная, в частности, с устранением парадоксов, способствовала развитию не только методов теории множеств, но и такой науки, как математическая логика.

Через $\subseteq$ обозначим *отношение включения* между множествами, т. е. $A \subseteq B$, если каждый элемент множества A есть элемент множества B. Тогда говорят, что A есть *подмножество* множества B. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то говорят, что A есть

собственное подмножество B, и пишут $A \subset B$.

Пример 1.4. Множество четных чисел есть подмножество множества целых чисел; множество рациональных чисел есть подмножество множества действительных чисел; $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$.

Заметим, что: а) $X \subseteq X$; б) если $X \subseteq Y$, $Y \subseteq Z$, то $X \subseteq Z$; в) если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то $X = Y$.

Не надо смешивать отношения принадлежности и включения. Хотя $1 \in \{1\}$, $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$, не верно, что $1 \in \{\{1\}\}$, так как единственным элементом множества $\{\{1\}\}$ является $\{1\}$.

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\emptyset$. Пустое множество есть подмножество любого множества.

Множество всех подмножеств A называется *множеством-степенью* и обозначается $P(A)$.

Пример 1.5. Если $A = \{1, 2, 3\}$, то $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$.

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться утверждением, что если множество A состоит из n элементов, то множество $P(A)$ состоит из 2^n элементов (см. задачу 3).

1.1.2. Операции над множествами. Алгебра множеств

Продолжая рассмотрение методов, с помощью которых из данных множеств можно получить новые множества, приведем понятие операций над множествами. Эти операции в некотором смысле аналогичны алгебраическим операциям над числами.

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами множества A или B:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого являются элементами обоих множеств A и B:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Очевидно, что выполняются включения $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ и $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

Относительным дополнением множества A до множества X (или разностью множеств X и A) называется множество

$X \setminus A$ всех тех элементов множества X, которые не принадлежат множеству A:

$$X \setminus A = \{x | x \in X \text{ и } x \overline{\in} A\}.$$

Симметрической разностью множеств A и B называется множество

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Если все рассматриваемые в ходе данного рассуждения множества являются подмножествами некоторого множества U, то это множество U называется универсальным для данного рассуждения.

Абсолютным дополнением множества A называется множество $\overline{A}$ всех тех элементов x, которые не принадлежат множеству A:

$$\overline{A} = U \setminus A.$$

Заметим, что $X \setminus A = X \cap \overline{A}$.

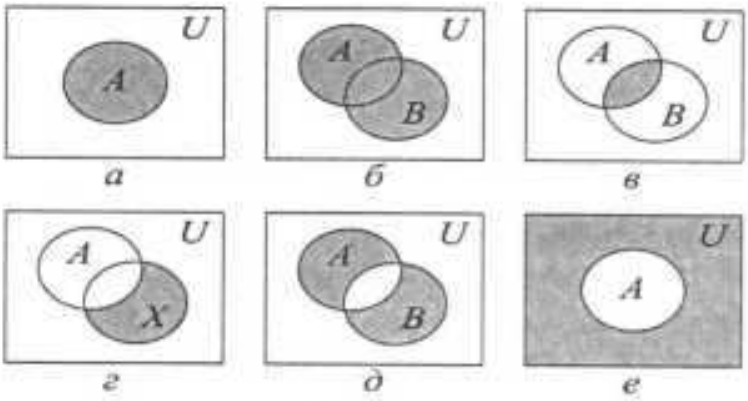


Рис. 1.1.

Для наглядного представления отношении между подмножествами какого-либо универсального множества используют диаграммы Эйлера—Венна. Само универсальное множество U изображают в виде прямоугольника, а его подмножества — в виде кругов, расположенных внутри прямоугольника. На рис. 1.1, *а* подмножество A универсального множества U изображено в виде заштрихованного круга. На рис. 1.1, *б—е* изображены соответственно объединение, пересечение, относительное дополнение, симметрическая разность, абсолютное дополнение.

Утверждение 1.1. *Для любых подмножеств A, B и C универсального множества U выполняются следующие тождества (основные тождества алгебры множеств):*

1. $A \cup B = B \cup A$ (*коммутативность* $\cup$);
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*ассоциативность* $\cup$);
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*дистрибутивность* $\cup$ *относительно* $\cap$);
4. $A \cup \varnothing = A$;
5. $A \cup \overline{A} = U$;
6. $A \cup A = A$;
7. $A \cup U = U$;
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (*закон де Моргана*);
9. $A \cup (A \cap B) = A$ (*закон поглощения*);

1'. $A \cap B = B \cap A$ (*коммутативность* $\cap$);
2'. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*ассоциативность* $\cap$);
3'. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*дистрибутивность* $\cap$ *относительно* $\cup$);
4'. $A \cap U = A$;
5'. $A \cap \overline{A} = \varnothing$;
6'. $A \cap A = A$;
7'. $A \cap \varnothing = \varnothing$;
8'. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (*закон де Моргана*);
9'. $A \cap (A \cup B) = A$ (*закон поглощения*).

Докажем тождество 3. Сначала покажем, что $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Действительно, если $x \in A \cup (B \cap C)$, то $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Отсюда $x \in B \cup A$ и $x \in C \cup A$, а значит, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Теперь покажем, что $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$. Если $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in A$ или $x \in B$ и $x \in C$, т. е. $x \in B \cap C$. Отсюда $x \in A \cup (B \cap C)$.

Докажем тождество 8. Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. Тогда $x \in U$ и $x \overline{\in} A \cup B$. Следовательно, $x \overline{\in} A$ и $x \overline{\in} B$. Отсюда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, а значит, $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Итак, $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Пусть теперь $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$. Следовательно, $x \in U$ и $x \overline{\in} A$ и $x \overline{\in} B$. Значит, $x \overline{\in} A \cup B$, т. е. $x \in \overline{A \cup B}$. Итак, $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Остальные тождества доказываются аналогично.

Утверждение 1.2. *Предложения о произвольных множествах A и B попарно эквивалентны:*

$$1)\ A \subseteq B; \quad 2)\ A \cap B = A; \quad 3)\ A \cup B = B.$$

Докажем, что из первого предложения следует второе. Действительно, так как $A \cap B \subseteq A$, то достаточно показать, что в этом случае $A \subseteq A \cap B$. Но если $x \in A$, то $x \in B$, так как $A \subseteq B$, и, следовательно, $x \in A \cap B$.

Докажем, что из второго утверждения следует третье. Так как $A \cap B = A$, то $A \cup B = (A \cap B) \cup B$. По закону поглощения (см. тождество 9) $B \cup (A \cap B) = B$. Отсюда, используя закон коммутативности, получаем $A \cup B = B$.

Докажем, что из третьего предложения следует первое. Так как $A \subseteq A \cup B$, а по условию третьего предложения $A \cup B = B$, то $A \subseteq B$.

1.1.3. Упорядочение. Прямое произведение множеств

Введем понятие упорядоченной пары и упорядоченной n-ки элементов. Как и понятие множества эти понятия являются исходными, неопределяемыми.

Упрорядоченная пара $< x, y >$ интуитивно определяется как совокупность, состоящая из двух элементов x и y, расположенных в определенном порядке. Две пары $< x, y >$ и $< u, v >$ считаются равными тогда и только тогда, когда $x = u$ и $y = v$.

Упорядоченная n-ка элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначается $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$ и, по определению, есть

$$<< x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} >, x_n > .$$

Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *компонентами* или *координатами* n-ки. Упорядоченная n-ка называется также *кортежем* из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Координаты точки на плоскости — упорядоченная пара чисел, координаты точки в пространстве — упорядоченная тройка чисел. Очередь из покупателей в магазине, кортеж автомобилей при встрече официального лица являются примерами таких упорядоченных наборов элементов.

Прямым произведением множеств X и Y называется совокупность всех упорядоченных пар $< x, y >$ таких, что $x \in X$ и $y \in Y$. Обозначается прямое произведение множеств X и Y через $X \times Y$.

Прямым произведением множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется совокупность всех упорядоченных n-ок $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$ таких, что $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначается прямое произведение множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ через $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Если $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, то пишут $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = X^n$.

Пример 1.6.

1. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{0, 1\}$. Тогда

$$X \times Y = \{ <1, 0>, <1, 1>, <2, 0>, <2, 1>, <3, 0>, <3, 1>\};$$
$$Y \times X = \{ <0, 1>, <0, 2>, <0, 3>, <1, 1>, <1, 2>, <1, 3>\}.$$

Мы указали, кроме того, такие множества X и Y, что $X \times Y \neq Y \times X$.

2. Пусть X — множество точек отрезка $[0, 1]$, а Y — множество точек отрезка $[1, 2]$. Тогда $X \times Y$ — множество точек квадрата $[0, 1] \times [1, 2]$ с вершинами в точках $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$ (см. рис. 1.2).

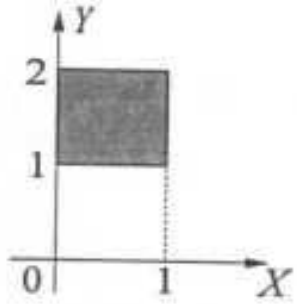


Рис. 1.2.

Задачи и упражнения

1. Доказать, что $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$.

2. Существуют ли такие множества A, B и C, что $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$?

3. Доказать, что если множество A состоит из n элементов, то множество $P(A)$ состоит из 2^n элементов.

4. Доказать следующие тождества:

а) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$;

б) $(\overline{A} \cup B) \cap A = A \cap B$;

в) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

д) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

е) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

ж) $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$.

5. Доказать, что:

а) $(A \cup B) \subseteq C$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq C$ и $B \subseteq C$;

б) $A \subseteq B \cap C$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$;

в) $A \cap B \subseteq C$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq \overline{B} \cup C$;

г) $A \subseteq B \cup C$ тогда и только тогда, когда $A \cap \overline{B} \subseteq C$.

6. Доказать, что $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

7. Какие из утверждений верны для всех A, B и C:

а) если $A \in B$ и $B \in C$, то $A \in C$;

б) если $A \cap B \subseteq C$ и $A \cup B \subseteq C$, то $A \cap C = \varnothing$;

в) если $A \neq B$ и $B \neq C$, то $A \neq C$;

г) если $A \subseteq \overline{B \cup C}$ и $B \subseteq \overline{A \cup C}$, то $B = \varnothing$?

8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} A \cap X = B; \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

где A, B и C — данные множества; $B \subseteq A \subseteq C$.

9. Найти геометрическую интерпретацию множества $A \times B$, где A — множество точек отрезка $[0, 1]$; B — множество точек квадрата с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

10. Доказать, что $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$. При каких A, B, C, D включение можно заменить равенством?

11. Доказать, что для произвольных множеств A, B, C, D:

а) $(A \cap B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;

б) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

в) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

г) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

12. Пусть A, $B \neq \varnothing$ и $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$. Доказать, что в этом случае $A = B = C = D$.

Часть 3

Элементы комбинаторного анализа

Лекция 8

На практике часто встречаются задачи, где необходимо подсчитать число всех возможных способов размещения некоторых предметов конечного множества или число всех возможных способов выполнения определенного действия из конечного множества таких действий. Задачи такого типа называются **комбинаторными**, а методы их решения — **методами комбинаторного анализа**. Поскольку комбинаторика имеет дело с конечными множествами, то ее часто называют **теорией конечных множеств**.

Таким образом, комбинаторика — это раздел дискретной математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными свойствами.

1. Основные правила комбинаторики

Мы уже рассматривали задачу: подсчет числа элементов в декартовом произведении множеств $\{1, 2, 3\} \times \{x, y\}$. Число таких элементов, как мы видели, равно произведению числа элементов первого множества на число элементов второго множества, т. е. в нашем случае это $3 \cdot 2 = 6$.

За этой простой задачей стоит правило, которое называется первым основным правилом комбинаторики: правило произведения.

Пусть необходимо выполнить последовательно k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе n_2 способами и так далее до k — действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий можно выполнить $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Другим часто применяемым в комбинаторике правилом является правило суммы. Это правило формулируется следующим образом: если элемент x может быть выбран m способами, а элемент y — другими n способами, то выбор «либо x либо y» может быть осуществлен $m + n$ способами.

2. Перечислительная комбинаторика или теория перечислений

Будем рассматривать задачи, связанные с нахождением числа способов построения кортежей из элементов конечного множества. Простейшими такими кортежами являются размещения, перестановки, сочетания. Эти задачи образуют часть комбинаторики, называемой перечислительной комбинаторикой или теорией перечислений.

Пусть A — конечное множество, состоящее из n элементов $|A| = n$.

а) *Размещения.* Кортежи длины k ($1 \leqslant k \leqslant n$), состоящие из различных элементов n-элементного множества A (кортежи отличаются один от другого как самими элементами, так и их порядком), называются размещениями из n элементов множества A по k. Число таких размещений будем обозначать A_n^k (буква A от французского слова *arrangement* — размещение). Схема выбора состоит в выборе k элементов из n-элементного множества без возвращения.

Тогда необходимо совершить k действий, причем первое действие можно совершить n способами, второе $(n-1)$ способами и т. д., k-е действие $n-(k-1)$ способами. Согласно комбинаторному правилу умножения, получим формулу: $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Если умножить и разделить полученное выражение на $(n-k)!$, получим:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

где $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ и называется факториалом числа n (читается n-факториал). Причем: $0! = 1$; $1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; $5! = 4! \cdot 5 = 120 \ldots$.

Пусть, например, дано множество $A\{1, 3, 5\}$. Выпишем все размещения из трех элементов по два: $\langle 1, 3\rangle$, $\langle 1, 5\rangle$, $\langle 3, 5\rangle$, $\langle 3, 1\rangle$, $\langle 5, 3\rangle$, $\langle 5, 1\rangle$.

Число этих размещений можно найти по формуле

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1!} = 6.$$

б) *Перестановки.* Пусть у нас есть n-элементное множество A, будем строить из этого множества размещения в виде кортежей длины n. Эти размещения будут отличаться друг от друга только порядком, поскольку в каждом из них встречаются по одному разу все элементы множества A. Такие размещения называются перестановками и обозначаются P_n (буква P от английского слова *permutation* — перестановка). Поскольку $P_n = A_n^n$, то число перестановок вычисляется по формуле $P_n = n!$.

Выясним, например, сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая входит в число только один раз.

Составим такие числа: $\langle 1, 2, 3\rangle$, $\langle 1, 3, 2\rangle$, $\langle 2, 1, 3\rangle$, $\langle 2, 3, 1\rangle$, $\langle 3, 1, 2\rangle$, $\langle 3, 2, 1\rangle$ — то есть шесть чисел. С помощью введенной формулы можно сразу определить число перестановок, не выписывая их:

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

в) *Сочетания.* Из n-элементного множества A будем строить упорядоченные множества длины k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, не учитывая порядок элементов, т. е. размещения с одними и теми же элементами, расположенными в разном порядке, будем считать равными.

Такие размещения называются сочетаниями и обозначаются C_n^k (буква C от английского слова *combination* — комбинация).

Число сочетаний из n элементов по k меньше числа размещений из n элементов по k в P_k раз, т. е. $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k}$.

Используя это утверждение, выведем формулу для вычисления числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Из этой формулы непосредственно вытекает, что $C_0^0 = C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Выясним, какие парные сочетания можно составить из цифр 1, 3, 5 и сколько их. Выпишем эти сочетания:

$$\langle 1, 3\rangle, \quad \langle 1, 5\rangle, \quad \langle 3, 5\rangle,$$

т. е. $C_3^2 = \dfrac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$ или $C_3^2 = C_3^{3-2} = C_3^1 = 3$.

Непосредственной проверкой легко доказать следующие тождества:

а) $C_n^k \cdot C_k^r = C_n^r \cdot C_{n-r}^{k-r}$, где $0 \leqslant r \leqslant k \leqslant n$.

Действительно:

$$C_n^k \cdot C_k^r = \frac{n! \cdot k!}{(n-k)! \cdot k! \cdot (k-r)! \cdot r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \cdot \frac{(n-r)!}{(n-k)! \cdot (k-r)!} = C_n^r \cdot C_{n-r}^{k-r}.$$

б) $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$:

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

3. Комбинации элементов с повторениями

Все приведенные формулы справедливы в том случае, когда n элементов множества A различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае рассматриваются комбинации **с повторениями**, число которых вычисляется по другим формулам.

Размещениями с повторениями из n элементов по k называются кортежи длины k, составленные из n — элементного множества A. Число этих кортежей обозначают $\overline{A_n^k}$. Черта указывает на возможность повторения элементов $\overline{A_n^k} = n^k$. Например, сколько пятизначных номеров можно составить из элементов множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$? Такими номерами являются кортежи длины 5, составленные из девятиэлементного множества, где схема выбора состоит в выборе 5 элементов из девятиэлементного множества с возвращением, т. е. для каждого из пяти элементов есть девять способов выбора, т. е. $\overline{A_9^5} = 9^5 = 59\,049$.

Перестановкой с повторениями состава $(n_1, \ldots, n_k)$ из букв $(a_1, \ldots, a_k)$ называют любой кортеж длины $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, в который a_1 входит n_1 раз, a_2 входит n_2 раз, ..., a_k — n_k раз. Число таких перестановок обозначают

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Еще один пример. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»? Слово «математика» является кортежем длины 10, имеющем состав $(2, 3, 2, 1, 1, 1)$ (буква «м» входит два раза, буква «а» входит 3 раза, буква «т» входит два раза, буквы «е», «и», «к» входят по одному разу). Значит, при перестановках букв получится $P(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151\,200$ слов.

Сочетания с повторениями. Пусть имеются предметы n видов и из них составляется набор, содержащий k элементов, т. е. различными исходами будут всевозможные наборы длины k, отличающиеся составом, и при этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Такие наборы называются сочетаниями с повторениями, а их общее число определяется формулой : $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$.

Например, нужно выяснить, сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в продаже имеются 4 сорта?

Искомое число равно $C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = C_{10}^3 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$.

4. Бином Ньютона

С числами C_n^k связано функциональное тождество, называемое формулой бинома Ньютона. Из элементарной математики хорошо известны формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Эти формулы можно записать так:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 ab + C_2^2 a^0 b^2;$$
$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 ab^2 + C_3^3 a^0 b^3.$$

Имеет место и общая закономерность: справедливо равенство:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n.$$

Это равенство и называется биномом Ньютона, а коэффициенты $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$ называются биномиальными коэффициентами.

Если положить $a = b = 1$, то из формулы бинома Ньютона вытекает следующее важное соотношение: $(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$ — формула суммы биномиальных коэффициентов.

Если положить в биноме Ньютона $a = 1$, $b = -1$, то

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Поскольку $C_n^k = C_n^{n-k}$, то биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов в формуле бинома Ньютона, равны.

Пятое практическое занятие по теме «Комбинаторные формулы. Бином Ньютона»

Задача 1. Составьте все перестановки:

1) из трех букв: a, b, c;

2) из четырех цифр: 5, 4, 3, 2.

Решение.

1) abc, acb, bac, bca, cab, cba;

2) 5432, 5423, 5342, 5324, 5243, 5234, 4532, 4523, 4325, 4352, 4235, 4253, 3542, 3524, 3452, 3425, 3245, 3254, 2345, 2354, 2435, 2453, 2534, 2543.

Задача 2. Составьте все размещения:

1) из четырех букв a, b, c, d по 3 буквы в каждом (без повторений);

2) из четырех цифр: 1, 3, 5, 7 по 2 цифры в каждом.

Решение.

1) *abc abd bcd acd acb adb bdc adc bac bad cbd cad bca bda cdb cda cab dab dbc dac cba dba dcb dca*;

2) 1 3; 1 5; 1 7; 3 1; 3 5; 3 7; 5 1; 5 3; 5 7; 7 1; 7 3; 7 5.

Задача 3. Вычислите:

1) A_6^3; 2) A_7^4; 3) A_8^5; 4) $\frac{A_6^3}{A_5^2}$; 5) $\frac{A_8^3 + A_7^4}{A_6^3}$; 6) $\frac{A_{10}^6 - A_{10}^5}{A_9^5 - A_9^4}$.

Задача 4. Вычислите:

1) P_4; 2) P_6; 3) P_9; 4) $\frac{P_8}{P_6}$; 5) $\frac{P_5 + P_4}{P_3}$; 6) $\frac{P_6 - P_4}{P_3}$.

Задача 5. Вычислите:

1) $\frac{P_8}{A_8^7}$; 2) $\frac{A_7^4 - P_5}{A_5^2}$; 3) $\frac{2P_3 + 3A_4^2}{5P_5 - P_3}$; 4) $\frac{P_8 P_7}{7P_7}$.

Задача 6. Составьте все сочетания (без повторений) из пяти букв: a, b, c, d, e по 3 буквы в каждом.

Решение. *abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.*

Задача 7. Вычислите:

1) C_6^2; 2) C_8^3; 3) C_{11}^4; 4) C_{12}^7; 5) C_{100}^{98}; 6) C_{20}^{17}; 7) C_{40}^{38}; 8) C_{54}^{52}.

Задача 8. Проверьте равенства:

1) $C_{10}^{15} = \frac{A_{15}^5}{P_5}$; 2) $C_6^2 = \frac{A_m^{m-8}}{P_{m-8}}$.

Задача 9. Решите уравнения:

1) $A_{x+1}^2 = 30$; 2) $5C_x^3 = C_{x+2}^4$; 3) $C_x^3 = \frac{5x(x-3)}{4}$; 4) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$;

5) $\frac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$; 6) $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$; 7) $C_{x+1}^5 = \frac{3A_x^3}{8}$; 8) $\frac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$.

Ответ: 1) 5; 2) 3; 14; 3) 7; 4) 9; 5) 10; 6) 8; 7) 8; 8) 7.

Задача 10. Сколько номеров, состоящих из трех букв, за которыми идут две цифры, можно составить, используя 32 буквы и 10 цифр?

Решение. Обозначим множество из 32 букв через A, а множество из 10 цифр через B. Тогда $|A| = 32$; $|B| = 10$. Каждый номер требуемого вида является кортежем длины 5 из декартова произведения $A \times A \times A \times B \times B$. Тогда $|A \times A \times A \times B \times B| = 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 10 \cdot 10 = 3\,276\,800$.

Задача 11. Сколько существует пятизначных номеров:

1) не содержащих цифру 8;
2) не содержащих цифры 0 и 8;
3) составленных из цифр 2, 3, 5, 7?

Ответ: 1) 59 049, 2) 32 768, 3) 1024. Указание: здесь $\overline{A_n^k} = n^k$.

Задача 12. Сколькими способами можно разложить 28 различных предметов по четырем ящикам, так, чтобы в каждом ящике оказалось по 7 предметов?

Решение. Число способов равно: $P(7, 7, 7, 7) = \dfrac{28!}{(7!)^4}$.

Задача 13. В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и т. д., всего по 16 разделам науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Сколько наборов из четырех заказов можно составить по 16 разделам науки?

Решение. Искомое число равно числу сочетаний с повторениями из 16 элементов по 4, т. е. $\overline{C_{16}^4} = C_{16+4-1}^4 = C_{19}^4 = 3876$.

Задача 14. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера. Если имеется 80 солдат и 3 офицера?

Ответ: 246 480.

Задача 15. Найдите:

1) четвертый член разложения $(a + 3)^7$;
2) четвертый член разложения $(a + \sqrt{b})^{12}$;
3) восьмой член разложения $(a^2 + b^3)^{13}$;
4) средний член разложения $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^8$;
5) средний член разложения $(x\sqrt{x} - 1)^{14}$;
6) два средних члена разложения $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b})^{13}$.

Ответ: 1) $945a^4$; 2) $495a^4b^4$; 3) $1287(a^{16}b^{15})$; 4) $70a^2b^2$; 5) $-3432x^{10}\sqrt{x}$; 6) $-1716a^3 \cdot b^2\sqrt[3]{b}$; $1716a^3\sqrt{a}b^2$.

Задача 16. Определите x из условия, что третий член разложения бинома $(x + x^{\lg x})^5$ равен 1 000 000.

Ответ: 10; $\dfrac{1}{\sqrt{100\,000}}$.

Задача 17. Найдите тот член разложения бинома

$$\left(z\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^m,$$

который после упрощения содержит z^5, если сумма биномиальных коэффициентов этого разложения равна 128.

Ответ: $35z^5$.

Контрольные вопросы

1. Что такое комбинаторика и для чего она нужна?

2. Что называется:

— перестановкой n-элементного множества;

— размещением из n элементов по m элементов;

— сочетанием из n элементов по m элементов?

3. В чем отличие размещений от перестановок?

4. В чем отличие сочетаний от размещений?

5. Сколькими способами можно разместить три книги на книжной полке?

6. Запишите формулу для вычисления числа сочетаний элементов, используемую в формуле бинома Ньютона.

7. Как найти число перестановок с повторениями?

8. Сколько существует пятизначных чисел, у которых каждая следующая цифра:

— меньше предыдущей,

— больше предыдущей.

9. Сколько прямых можно провести через n точек, если никакие три из них не лежат на одной прямой?

10. Сколько разных слов можно составить перестановкой букв в слове «чачача»?

11. Вычислите: $(a + b + c)^2$; $(a + b + c)^3$.

12. Покажите, что сумма $C_p^1 + C_p^2 + \ldots + C_p^{p-1}$ делится на p, где p — простое число.

13. Докажите свойства биномиальных коэффициентов.

Часть 1

Элементы математической логики

Лекции 1–4

Математическая логика — это анализ методом рассуждений, при этом в первую очередь исследуются формы рассуждений, а не их содержание, т. е. математическая логика исследует соотношения между основными понятиями математики, на базе которых доказываются математические утверждения. Простейшую из формальных логических теорий называют *алгеброй высказываний*, поэтому начнем знакомство с элементами математической логики с такого понятия, как *высказывание*, которое лежит в основе логико-математической теории дискретной математики.

1. Составные высказывания

Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором в данной ситуации можно сказать, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

Приведем примеры высказываний.

Пример 1. Волга впадает в Каспийское море.

Пример 2. Два больше трех.

Первое высказывание является истинным, а второе — ложным.

Таким образом, высказывание обладает свойством представлять истину или ложь, поэтому на высказывание можно смотреть как на величину, которая может принимать только одно из двух значений: «истина», «ложь».

Поставим в соответствие высказыванию логическую переменную x, которая принимает значение 1, если высказывание истинно, и 0, если высказывание ложно.

Мы не будем исследовать внутреннюю структуру высказываний, потому что такое исследование оказывается достаточно трудным и относится скорее к лингвистике, чем к математике. Поэтому мы будем поступать

так, как если бы мы знали все о простых высказываниях, и будем изучать лишь их сочетания, т. е. как различными способами из отдельных высказываний можно построить новое высказывание.

Это новое высказывание называется *составным*, в то время как высказывания, из которых оно образовано, называются его простыми составляющими или компонентами. Любое высказывание, даже такое, которое на самом деле является сложным, может быть использовано в качестве одного из простых составляющих какого-то другого составного высказывания.

2. Простейшие связки

Значение истинности составного высказывания определяется значениями истинности его компонент.

Высказывания будем обозначать прописными буквами латинского алфавита X, Y, Z ... .

Составные высказывания будем получать из простых с помощью логических операций: *отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность*, которые осуществляются при помощи логических связок: $\overline{}$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$.

Название	Прочтение	Обозначение
Отрицание	не	$\overline{}$
Конъюнкция	и	$\wedge$
Дизъюнкция	или	$\vee$
Импликация	если...то	$\rightarrow$
Эквивалентность	тогда и только тогда, когда	$\leftrightarrow$

При рассмотрении той или иной связки мы хотим знать, каким именно образом истинность составного высказывания, порожденного этой связкой, зависит от истинности его компонент. Очень удобно изображать эту зависимость, пользуясь таблицами истинности, которые называются также интерпретациями логических операций. Каждой строке таблицы истинности взаимно однозначно соответствует набор составляющих высказываний и соответствующее значение составного высказывания. Наборы из нулей и единиц, соответствующих составляющим высказываниям, в каждой строке таблицы истинности имеют стандартное расположение, т. е. расположены в лексикографическом порядке (порядке возрастания).

Пусть даны два произвольных высказывания X и Y.

Отрицанием высказывания X называется высказывание $\overline{X}$, которое истинно, когда X ложно, и ложно, когда X истинно.

Таблица истинности для отрицания.

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

Конъюнкцией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \wedge Y$, которое истинно только в том случае, когда X и Y оба истинны.

Таблица истинности для конъюнкций.

X	Y	$X \wedge Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкцией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \vee Y$, которое истинно, когда хотя бы одно из них истинно.

Таблица истинности дизъюнкций.

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликацией двух высказываний X и Y называется высказывание $X \to Y$, которое ложно тогда и только тогда, когда X истинно, а Y ложно.

Таблица истинности для импликации.

X	Y	$X \to Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентностью высказываний X и Y называется высказывание $X \leftrightarrow Y$, которое истинно тогда и только тогда, когда X и Y оба истинны или ложны.

Таблица истинности для эквивалентности.

X	Y	$X \leftrightarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Для образования составных высказываний наряду с единичным использованием каждой основной связки можно пользоваться основными связками многократно, получая более сложные составные высказывания — аналогично тому, как с помощью основных арифметических операций образуются сложные алгебраические выражения.

Например, составными будут высказывания:

$$\overline{(X \wedge Y)}; \quad X \wedge \overline{X}; \quad (X \vee Y) \vee \overline{X}.$$

Их следует читать «изнутри наружу», подобно алгебраическим выражениям, в которых сначала группируются величины, заключенные в самые внутренние скобки, затем эти скобки в свою очередь группируются и т. д. Если скобок нет, то операции надо выполнять в следующем порядке: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность, отрицание. Каждое составное высказывание имеет свою таблицу истинности, которая может быть построена стандартным образом.

3. Другие связки

Новые высказывания могут быть образованы при помощи нескольких логических операций и составлять формулы, некоторые из которых рассматриваются как логические операции, осуществляемые при помощи других логических связок: $|$; $\downarrow$; $\oplus$.

Название	Прочтение	Обозначение
Штрих Шеффера	Антиконъюнкция	$\mid$
Стрелка Пирса	Антидизъюнкция	$\downarrow$
Сумма по модулю два	Антиэквивалентность	$\oplus$

Штрих Шеффера, $X \mid Y$ или антиконъюнкция, по определению $(X \mid Y) = \overline{X \wedge Y}$.

Таблица истинности штриха Шеффера.

X	Y	$X \mid Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Стрелка Пирса, или антидизъюнкция, по определению $X \downarrow Y = \overline{X \vee Y}$.

Таблица истинности стрелки Пирса.

X	Y	$X \downarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Сумма по модулю два, или антиэквивалентность, по определению $X \oplus Y = \overline{X \leftrightarrow Y}$.

Таблица истинности суммы по модулю два.

X	Y	$X \oplus Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Заметим, что таблицы истинности логических операций содержат 2^n строк, где n — число простых высказываний.

4. Логические отношения

Иногда бывает желательно рассмотреть взаимоотношение двух высказываний. Наиболее интересное из таких отношений имеет место, когда из одного высказывания логически следует другое. Если из X следует Y, мы говорим также, что Y является следствием X или что Y логически выводимо из X. Исходя из анализа логических возможностей для пары высказываний X и Y, отношение следствия можно охарактеризовать таким образом: из X следует Y, если Y истинно всякий раз, когда истинно X, т. е. если Y истинно во всех логически возможных случаях, в которых X истинно.

В случаях составных высказываний, имеющих одни и те же компоненты, таблицы истинности дают удобный метод для проверки того, имеет ли место отношение следствия.

Следующая таблица иллюстрирует этот метод:

X	Y	$X \leftrightarrow Y$	$X \rightarrow Y$	$X \vee Y$
0	0	1	1	0
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Высказывание $X \leftrightarrow Y$ истинно в первом и четвертом случаях и в обоих этих случаях истинно также высказывание $X \to Y$. Мы видим, что из $X \leftrightarrow Y$ следует высказывание $X \to Y$. Сравнение двух последних столбцов показывает, что из высказывания $X \to Y$ не следует $X \vee Y$, и из $X \vee Y$ не следует $X \to Y$.

При помощи таблиц истинности удобно осуществлять проверку эквивалентности двух составных высказываний, имеющих одни и те же компоненты. Для этого достаточно лишь посмотреть, одинаковы ли таблицы истинности у этих составных высказываний.

Из следующей таблицы истинности видно, что $X \to Y$ эквивалентно $\overline{X} \vee Y$.

X	Y	$X \to Y$	$\overline{X} \vee Y$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Два высказывания называются логически несовместимыми, если из истинности одного из них необходимо следует ложность другого. Другими словами, несовместимость высказываний X и Y означает, что они никогда не могут оказаться одновременно истинными. Если несколько составных высказываний построены из одних и тех же простых составляющих, то для проверки их совместимости нужно построить таблицы истинности для каждого из высказываний. Если среди всех строк найдется, по крайней мере, одна, в которой все составные высказывания истинны, то составные высказывания совместимы. В противном случае они оказываются несовместимыми.

5. Варианты импликации

Импликация двух высказываний отличается от эквивалентности, а также от дизъюнкции и конъюнкции тем, что она несимметрична. Так, $X \vee Y$ эквивалентно $Y \vee X$; $X \wedge Y$ эквивалентно $Y \wedge X$; $X \leftrightarrow Y$ эквивалентно $Y \leftrightarrow X$, но $X \to Y$ не эквивалентно $Y \to X$. Высказывание $Y \to X$ называется **конверсией** высказывания $X \to Y$. Многие из наиболее распространенных ошибок в рассуждениях происходят от смешивания какого-либо высказывания с его конверсией. Интересно поэтому рассмотреть те импликации, которые могут быть образованы из высказываний X и Y.

В таблице истинности представлены четыре импликации и их названия.

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	Импликация $X \to Y$	Конверсия импликации $Y \to X$	Конверсия контрапозиции $\overline{X} \to \overline{Y}$	Контрапозиция $\overline{Y} \to \overline{X}$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Из таблицы видно, что $X \to Y$ эквивалентно $\overline{Y} \to \overline{X}$. Последнее называется контрапозицией первого. Контрапозиция является удобной формой импликации во многих рассуждениях. Аналогично, высказывание $\overline{X} \to \overline{Y}$ представляет собой конверсию контрапозиции. Так как контрапозиция эквивалентна $\overline{X} \to \overline{Y}$, то конверсия этой контрапозиции эквивалентна конверсии этой импликации.

С импликацией связано постоянное упоминание математиками «необходимое условие» и «достаточное условие».

X является достаточным условием для Y	Если имеет место X, то Y также будет иметь место	Импликация $X \to Y$
X является необходимым условием для Y	Если имеет место Y, то X также будет иметь место	Конверсия достаточного условия $Y \to X$
X является необходимым и достаточным условием для Y	X имеет место, если и только если имеет место Y	Двойная импликация $X \leftrightarrow Y$ эквивалентность

6. Основные законы, определяющие свойства введенных логических операций

1) Идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции:

$$X \vee X \leftrightarrow X, \quad X \wedge X \leftrightarrow X.$$

2) Коммутативность дизъюнкции и конъюнкции:

$$X \vee Y \leftrightarrow Y \vee X, \quad X \wedge Y \leftrightarrow Y \wedge X.$$

3) Ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции:

$$X \vee (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \vee Z, \quad X \wedge (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \wedge Z.$$

4) Дистрибутивность операций дизъюнкции и конъюнкции относительно друг друга:

$$X \vee (Y \wedge Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \wedge (X \vee Z), \quad X \wedge (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z).$$

5) Двойное отрицание:

$$X \leftrightarrow \overline{\overline{X}}.$$

6) Закон де Моргана:

$$\overline{X} \vee \overline{Y} \leftrightarrow \overline{X \wedge Y}, \quad \overline{X} \wedge \overline{Y} \leftrightarrow \overline{X \vee Y}.$$

7) Склеивание:

$$(X \vee Y) \wedge (X \vee \overline{Y}) \leftrightarrow X, \quad (X \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Y}) \leftrightarrow X.$$

8) Поглощение:

$$X \vee (X \wedge Y) \leftrightarrow X, \quad X \wedge (X \vee Y) \leftrightarrow X.$$

9) Действие с логическими константами 0 и 1:

$$X \vee 0 \leftrightarrow X, \quad X \wedge 0 \leftrightarrow 0, \quad X \vee 1 \leftrightarrow 1, \quad X \wedge 1 \leftrightarrow X, \quad X \wedge \overline{X} \leftrightarrow 0.$$

10) Закон исключения третьего:

$$X \vee \overline{X} \leftrightarrow 1.$$

11) Тождество:

$$X \leftrightarrow X.$$

12) Отрицание противоречия:

$$\overline{\overline{X} \wedge X} \leftrightarrow 1.$$

13) Контрапозиция:

$$(X \to Y) \leftrightarrow (\overline{Y} \to \overline{X}).$$

14) Цепное заключение:

$$((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \leftrightarrow (X \to Z).$$

15) Противоположность:

$$(X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow (\overline{X} \leftrightarrow \overline{Y}).$$

16) Модус поненс (modus ponens):

$$(X \wedge (X \to Y)) \to Y \leftrightarrow 1.$$

Сформулированные законы легко проверить с помощью таблицы истинности.

Заметим, что при исследовании различных высказываний на эквивалентность (равносильность) логическую связку $\leftrightarrow$ можно заменить обычным знаком равенства $=$.

Первое практическое занятие по теме «Логические операции»

Задача 1. Составьте таблицу истинности формулы: $X \oplus Y \to \overline{Z} \vee X \mid \overline{Y} \wedge \overline{X}$.

Решение. Расставим скобки: $(X \oplus Y) \to (\overline{Z} \vee (X \mid (\overline{Y} \wedge \overline{X})))$.

X	Y	Z	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{Z}$	$X \oplus Y$	$\overline{Y} \wedge \overline{X}$	$X \mid (\overline{Y} \wedge \overline{X})$	$\overline{Z} \vee (X \mid (\overline{Y} \wedge \overline{X}))$	$(X \oplus Y) \to (X \mid (\overline{Y} \wedge \overline{X}))$
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1

Задача 2. Докажите тождественную истинность формулы $\overline{X} \to (X \to Y)$.

Решение. Составим таблицу истинности:

X	Y	$\overline{X}$	$X \to Y$	$\overline{X} \to (X \to Y)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Последний столбец состоит из 1, следовательно, доказана тождественная истинность формулы.

Задача 3. Докажите эквивалентность $X \wedge (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.

Решение. Пусть $\varphi_1 = X \wedge (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$. Составим таблицу истинности:

X	Y	Z	$X \vee Z$	$Y \vee Z$	$X \wedge (X \vee Z)$	$X \wedge (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Пусть $\varphi_2 = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.

X	Y	Z	$X \wedge Y$	$X \wedge Z$	$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Заметим, что таблицы истинности для φ_1 и φ_2 совпадают, следовательно, эквивалентность доказана.

Задача 4. Для каждого из следующих высказываний: 1) найдите символическую форму; 2) постройте таблицу истинности. Воспользуйтесь буквенными обозначениями: X для «Джо умен»; Y для «Джим глуп»; Z для «Джо получит приз».

(a) Если Джо умен, а Джим глуп, то Джо получит приз.

(b) Джо получит приз в том и только в том случае, если он умен или если Джим глуп.

(c) Если Джим глуп, а Джо не удастся получить приз, то Джо не умен.

Решение. **(a)** $(X \wedge Y) \to Z$; **(b)** $Z \leftrightarrow (X \vee Y)$; **(c)** $(Y \wedge \overline{Z}) \to \overline{X}$.

X	Y	Z	$\overline{X}$	$\overline{Z}$	$X \wedge Y$	$(X \wedge Y) \to Z$	$X \vee Y$	$Z \leftrightarrow (X \vee Y)$	$Y \wedge \overline{Z}$	$(Y \wedge \overline{Z}) \to \overline{X}$
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
						(a)		(b)		(c)

Задача 5. Таблица истинности высказывания, составленного из двух простых высказываний, состоит из четырех строк; а таблица истинности высказывания, составленного из трех простых высказываний, — из восьми строк. Сколько строк должна иметь таблица истинности высказывания, составленного из четырех простых высказываний? Сколько — из пяти? Сколько — из n? Укажите способ систематической записи таблиц истинности для произвольного n?

Указание. Для систематической записи таблиц истинности для произвольного n можно применить метод «последовательного половинного деления столбцов» — столбец первой переменной делят пополам и заполняют верхнюю половину нулями, а нижнюю половину — единицами, затем каждую половину второго столбца делят пополам и опять заполняют полученные половины нулями и единицами и т. д.

Задача 6. Доказать равносильность, используя основные законы логических операций: $\overline{(X \wedge \overline{Y}) \vee (Y \wedge \overline{Z})} = (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$.

Решение.

1. Используя законы де Моргана $\overline{X} \vee \overline{Y} \leftrightarrow \overline{X \wedge Y}$ и $\overline{X} \wedge \overline{Y} \leftrightarrow \overline{X \vee Y}$, получим:

$$\overline{(X \wedge \overline{Y}) \vee (Y \wedge \overline{Z})} = \overline{(X \wedge \overline{Y})} \wedge \overline{(Y \wedge \overline{Z})} = (\overline{X} \vee \overline{\overline{Y}}) \wedge (\overline{Y} \vee \overline{\overline{Z}}).$$

2. Используя закон двойного отрицания $X \leftrightarrow \overline{\overline{X}}$, получаем:

$$(\overline{X} \vee \overline{\overline{Y}}) \wedge (\overline{Y} \vee \overline{\overline{Z}}) = (\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee Z).$$

3. Применяя дистрибутивный закон $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z) = X \vee (Y \wedge Z)$, получаем

$$(\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee Z) = ((\overline{X} \vee Y) \wedge \overline{Y}) \vee ((\overline{X} \vee Y) \wedge Z) =$$
$$= ((\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (Y \wedge \overline{Y})) \vee ((\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)).$$

4. Ассоциативность дизъюнкции: $X \vee (Y \vee Z) \leftrightarrow (X \vee Y) \vee Z$ позволяет упростить последнее выражение:

$$((\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (Y \wedge \overline{Y})) \vee ((\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)) = (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (Y \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \wedge Z).$$

5. Учитывая законы, включающие тождественно ложные высказывания, окончательно получаем:

$$(\overline{X} \wedge Y) \vee (Y \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) = (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Z) \vee (Y \wedge Z).$$

Задача 7. С помощью таблиц истинности проверить, являются ли эквивалентными высказывания: $f_1 = X \wedge (Y \to Z)$ и $f_2 = (\overline{X} \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.

Решение.

X	Y	Z	$\overline{X}$	$Y \to Z$	f_1	$\overline{X} \wedge Y$	$X \wedge Z$	f_2
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	1

Так как значения для высказываний f_1 и f_2 в таблице истинности не совпали, то они не эквивалентны.

Задача 8. Определите для каждого из следующих высказываний, будет ли оно логически истинным, противоречивым; ни тем, ни другим.

(а) $X \leftrightarrow X$; **(б)** $X \leftrightarrow \overline{X}$; **(в)** $(X \vee Y) \leftrightarrow (X \wedge Y)$; **(г)** $(X \to \overline{Y}) \to (Y \to \overline{X})$;
(д) $(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \wedge \overline{(X \to Z)}$; **(е)** $(X \to Y) \to X$; **(ж)** $((X \to Y) \to X) \to X$.

Решение.

X	Y	$X \leftrightarrow X$	$\overline{X}$	$X \leftrightarrow \overline{X}$	$X \vee Y$	$X \wedge Y$	$(X \vee Y) \leftrightarrow (X \wedge Y)$
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1
		(а)		(б)			(в)

Вывод: **(а)** — логически истинное; **(б)** — противоречивое; **(в)** — ни то, ни другое.

X	Y	$\overline{Y}$	$X \to \overline{Y}$	$Y \to \overline{X}$	$(X \to \overline{Y}) \to (Y \to \overline{X})$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
					(г)

(г) — логически истинное;

X	Y	Z	$X \to Y$	$Y \to Z$	$(X \to Y) \wedge (Y \to Z)$	$X \to Z$	$\overline{X \to Z}$	$(X \to Y) \wedge (Y \to Z) \wedge \overline{(X \to Z)}$
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0
								(д)

(д) — противоречиво;

X	Y	$X \to Y$	$(X \to Y) \to X$	$((X \to Y) \to X) \to X$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1
			(е)	(ж)

(е) — ни то, ни другое; **(ж)** — логически истинно.

Задача 9. Покажите, что высказывание $(X \leftrightarrow Y) \to (X \to Y)$ — логически истинно, а $(X \leftrightarrow Y) \to (X \vee Y)$ — нет.

Задача 10. Постройте таблицы истинности следующих составных высказываний: **(а)** $X \wedge Y$; **(б)** $X \to \overline{Y}$; **(в)** $\overline{X} \vee \overline{Y}$; **(г)** $\overline{X} \vee Y$; **(д)** $X \wedge \overline{Y}$. Для каких пар имеет место отношение следствия или эквивалентности?

Ответ: **(б)** эквивалентно **(в)**; из **(а)** следует **(г)**; из **(д)** следует **(б)**, **(в)**.

Задача 11. Постройте таблицы истинности следующих составных высказываний и расположите их в таком порядке, чтобы из каждого высказывания следовали все, стоящие после него: **(а)** $\overline{X} \leftrightarrow Y$; **(б)** $X \to Y$; **(в)** $X \to (Y \to X)$; **(г)** $X \vee Y$; **(д)** $\overline{X} \wedge Y$.
Ответ: **(в); (д); (а); (г); (б).**

Задача 12. Постройте составные высказывания, эквивалентные **а)** $X \leftrightarrow Y$; **б)** $X \vee Y$, используя только связки отрицания и конъюнкции.

Задача 13. Если X и Y логически истинны, а Z — логически ложно, то что можно сказать о высказывании $(X \vee \overline{Y}) \wedge \overline{Z}$?
Ответ: логически истинно.

Задача 14. Докажите, что конъюнкция импликации и ее конверсия эквивалентны двойной импликации, т. е. $(X \to Y) \wedge (Y \to X) \leftrightarrow (X \leftrightarrow Y)$.

Задача 15. Чему эквивалентна конъюнкция контрапозиции и ее конверсии?

Задача 16. Докажите, что отрицание высказывания : «X есть необходимое и достаточное условие для Y» эквивалентно высказыванию: «X есть необходимое и достаточное условие для $\overline{Y}$».

Задача 17. Докажите, что контрапозиция эквивалентна первоначальной импликации.

Задача 18. Пусть X означает: «Я сдам этот экзамен»; а Y: «Я буду регулярно выполнять домашние задания». Запишите в символической форме следующие высказывания:

(а) «Я сдам этот экзамен только в том случае, если буду регулярно выполнять домашние задания».

(б) «Регулярное выполнение домашних заданий является необходимым условием для того, что я сдам этот экзамен».

(в) «Сдача этого экзамена является достаточным условием того, что я регулярно выполнял домашние задания».

(г) «Я сдам этот экзамен в том и только в том случае, если я буду регулярно выполнять домашние задания».

(д) «Регулярное выполнение домашних заданий есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы я сдал этот экзамен».

Выясните, какому из перечисленных высказываний соответствуют следующие символические формы: $X \to Y$; $Y \leftrightarrow X$; $X \leftrightarrow Y$; $Y \to X$.

Задача 19. Докажите равносильность $\overline{X \to Y} = X \wedge \overline{Y}$ с помощью формул алгебры высказываний.
Решение. Используя формулу $X \to Y = \overline{X} \vee Y$, запишем: $\overline{X \to Y} = \overline{\overline{X} \vee Y}$, тогда $\overline{\overline{X} \vee Y} = \overline{\overline{X}} \wedge \overline{Y}$ по закону де Моргана, т. е. $\overline{X \to Y} = X \wedge \overline{Y}$, т. к. по закону двойного отрицания $\overline{\overline{X}} = X$, что и требовалось доказать.

Полученная формула дает правило построения отрицания для импликации, часто применяемое в математических рассуждениях: $\overline{X \to Y} = X \wedge \overline{Y}$.

Задача 20. Преобразуйте формулу $(X \to (Y \to Z)) \leftrightarrow \overline{Y \to X}$ к виду, не содержащему импликацию и эквивалентность.

Решение. Запишем цепочку преобразований:

$$(X \to (Y \to Z)) \leftrightarrow \overline{Y \to X} = \left(X \to (\overline{Y} \vee Z)\right) \leftrightarrow Y \wedge \overline{X} = \overline{X} \vee (\overline{Y} \vee Z) \leftrightarrow (Y \wedge \overline{X}) =$$
$$= \left((\overline{X} \vee (\overline{Y} \vee Z)) \wedge (Y \wedge \overline{X})\right) \vee \left(\overline{\overline{X} \vee (\overline{Y} \vee Z)} \wedge \overline{(Y \wedge \overline{X})}\right)$$

Задача 21. Проверьте, будут ли эквивалентны следующие формулы:
а) $X \to (Y \oplus Z)$ и $(X \to Y) \oplus (X \to Z)$; б) $X \mid (Y \to Z)$ и $(X \mid Y) \to (X \mid Z)$;
в) $X \downarrow (Y \leftrightarrow Z)$ и $\overline{(X \downarrow Y) \leftrightarrow (X \downarrow Z)}$.

Решение. Составим таблицы истинности:

(а)

X	Y	Z	$Y \oplus Z$	$X \to (Y \oplus Z)$	$X \to Y$	$X \to Z$	$(X \to Y) \oplus (X \to Z)$
0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0

Формулы не эквивалентны.

(б)

X	Y	Z	$Y \to Z$	$X \mid (Y \to Z)$	$X \mid Y$	$X \mid Z$	$(X \mid Y) \to (X \mid Z)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1

Формулы не эквивалентны.

(в)

X	Y	Z	$Y \leftrightarrow Z$	$X \downarrow (Y \leftrightarrow Z)$	$X \downarrow Y$	$X \downarrow Z$	$\overline{(X \downarrow Y) \leftrightarrow (X \downarrow Z)}$
0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0

Формулы эквивалентны.

Задача 22. Составьте таблицы истинности для высказываний:

а) $X \mid X$; б) $(X \mid Y) \mid (X \mid Y)$,

и покажите, что любая таблица истинности может быть реализована посредством составного высказывания, в котором используется единственная связка: штрих Шеффера.

Задача 23. Постройте таблицы истинности для высказываний:

а) $X \downarrow X$; б) $(X \downarrow Y) \downarrow (X \downarrow Y)$.

Какие другие составные высказывания имеют те же таблицы истинности? Покажите, что любая таблица истинности может быть реализована посредством составного высказывания, в котором используется единственная связка: стрелка Пирса.

Задача 24. Докажите, что импликация $X \to Y$ эквивалентна $((X \wedge Y) \oplus X) \oplus 1$.

Решение. Доказательство проведем с помощью таблицы истинности.

X	Y	$X \to Y$	$X \wedge Y$	$(X \wedge Y) \oplus X$	1	$((X \wedge Y) \oplus X) \oplus 1$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1

Задача 25. Докажите эквивалентность формул:

$$f_1 = (X \wedge Y \vee (\overline{X} \to Y \wedge Z)) \leftrightarrow (\overline{X} \to \overline{Y}) \to Z;$$

$$f_2 = (X \to Y) \oplus (Y \oplus Z).$$

Глава 4

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Теория графов — раздел дискретной математики, имеющий многочисленные приложения в различных областях экономики, социологии, техники.

Теория графов «открывалась» независимо много раз. Наиболее раннее известное упоминание этой теории встречается в работах Л. Эйлера, хотя проблему, которой он занимался можно рассматривать как обычную головоломку. Затем Г. Кирхгоф, занимаясь изучением электрических цепей, и А. Кэли, рассматривая проблему перечисления изомеров в органической химии, вновь подошли к решению задач теории графов. С тех пор многие исследователи, формируя модели в своих предметных областях, приходили к описанию их с помощью теории графов. Сам термин «граф» впервые был введен в 1936 году Д. Кенигом.

Методы теории графов успешно применяются в современной прикладной науке в задачах управления производством, при проектировании различных физических систем, являются основой математического обеспечения систем обработки информации. Теоретико-графовый подход используется в линейном программировании и исследовании операций, сетевом планировании и управлении. Теория графов тесно связана со многими разделами современной математики, содержит много интересных проблем, не решенных до настоящего времени.

4.1. Ориентированные и неориентированные графы. Основные понятия. Примеры приложений теории графов

Говорят, что задан *ориентированный граф* $G =< V, \Gamma >$, если указаны два множества: непустое множество V и множество Γ упорядоченных пар $< v, y >$, где $v, y \in V$. Элементы

множества V называют *вершинами* графа G, упорядоченные пары $< v, y >$ — *дугами* графа.

Граф можно изобразить на плоскости, ставя в соответствие каждой вершине v точку, а каждой дуге $< v, y >$ — линию с стрелкой, соединяющую эти точки.

Пример 4.1. На рис. 4.1 приведены два изображения ориентированного графа $G =< V, \Gamma >$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $\Gamma = \{< v_1, v_2 >, < v_1, v_3 >, < v_3, v_2 >, < v_3, v_5 >, < v_5, v_1 >, < v_5, v_2 >, < v_5, v_3 >\}$.

Поскольку множество упорядоченных пар Γ есть ни что иное как бинарное отношение на множестве V, то часто говорят, что граф изображает некоторое бинарное отношение, и бинарные отношения на конечных множествах иллюстрируются такими рисунками. Граф может служить моделью для всякой системы, содержащей бинарное отношение.

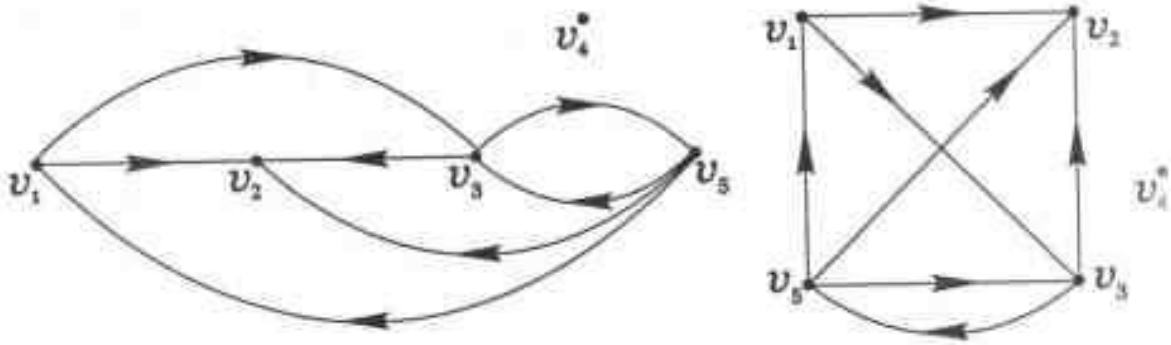


Рис. 4.1.

Наряду с понятием ориентированного графа используют также понятие неориентированного графа.

Говорят, что задан *неориентированный граф* $G =< V, Q >$, если указаны два множества: непустое множество V и множество Q некоторых пар $\{v, y\}$ элементов из V. Элементы множества V называют вершинами графа $G =< V, Q >$, неупорядоченные пары $\{v, y\}$ — ребрами. При изображении неориентированного графа на плоскости элементам множества V соответствуют точки, а ребрам — линии без стрелок, соединяющие соответствующие вершины.

Пример 4.2. На рис. 4.2 изображен неориентированный граф с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ и множеством ребер $Q = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}$.

Неориентированные графы можно считать частными случаями ориентированных графов, соответствующих симметричным

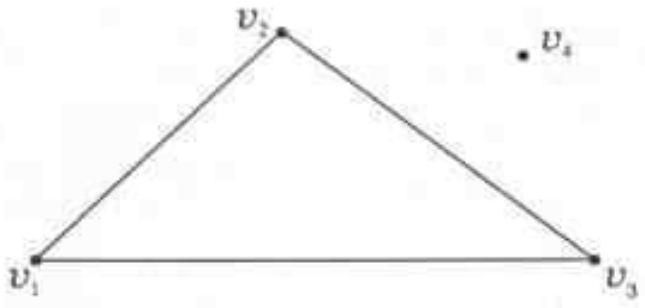


Рис. 4.2.

бинарным отношениям, т. е. таким ориентированным графам, которые наряду с каждой дугой $< v, y >$ содержат и дугу $< y, v >$. Ниже, каждый раз будем оговаривать, с каким типом графов — ориентированным или неориентированным имеем дело в соответствующих рассмотрениях.

Приведем примеры моделей и прикладных областей, в которых используются понятия и методы теории графов.

1. Модели организационных структур.

Вершинами являются различные объекты организационной структуры, дугами или ребрами — информационные, управленческие, технологические связи между объектами.

2. Модели, отражающие структуру и поведение социальных групп.

Вершины графа — члены общества или коллективы, дуги — отношения между ними. Такими графами (социограммами) описывается структура взаимоотношений между лицами или группой лиц и определяются показатели, оценивающие степень влияния, согласованности взаимодействия, напряженности между ними.

3. Модели обменных схем.

Вершины графа — участники обменной схемы, дуги — потоки финансовых или материальных ресурсов между ними. Обменные схемы возникают при анализе и оптимизации таких явлений как взаимозачеты, бартер.

4. Транспортные задачи.

Это класс задач, особенно часто встречающийся при планировании поставок, распределении товаров между потребителями и требующий оптимизации размещения пунктов производства и потребления, потоков грузов и др. Вершинами графа служат пункты размещения, дугами или ребрами — транспортные или

информационные маршруты.

5. Задачи сетевого планирования и управления.

Ориентированный граф является естественным средством описания и анализа сложных проектов, требующих выполнения большого числа взаимосвязанных операций (работ). Такие задачи календарно-сетевого планирования и управления заключаются в определении оптимальной последовательности выполнения операций и распределения ресурсов между ними. Критерием оптимальности являются время выполнения проекта, объем затрат, степень риска и прочее.

Рассмотрим ряд основных определений, связанных с понятием графа. Если $< v, y >$ — дуга, то говорят, что она *исходит* из вершины v (ее *начало*) и заходит в вершину y (ее *конец*). Множество вершин, исходящих из вершины v обозначают Γv, т. е. $\Gamma v = \{y| < v, y > \in \Gamma\}$. Соответственно $\Gamma^{-1}y = \{v| < v, y > \in \in \Gamma\}$. Дуга называется инцидентной вершине v, если она заходит в v или исходит из нее. Дуга вида $< v, v >$ называется *петлей*. Вершина, не имеющая инцидентных дуг называется *изолированной*. Две вершины называются *смежными*, если существует дуга, инцидентная им обоим. *Степенью* вершины называется число инцидентных ей дуг.

В графе, изображенном на рис. 4.1 дуга $< v_1, v_2 >$ исходит из v_1 и заходит в v_2, $\Gamma v_1 = \{v_2, v_3\}$, $\Gamma v_2 = \emptyset$, дуга $< v_1, v_2 >$ инцидентна вершинам v_1 и v_2, вершина v_4 — изолированная и степень ее равна нулю, степень вершины v_3 равна четырем, петель в этом графе нет.

Подграфом называется часть графа, образованная подмножеством вершин вместе со всеми дугами, соединяющими вершины из этого множества (только те, оба конца которых входят в подграф).

Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа.

Два графа $G =< V, \Gamma >$ и $G' =< V', \Gamma' >$ называются *изоморфными*, если существует биекция $f : V \to V'$ между множеством вершин, сохраняющая смежность, т. е. $< v, y > \in \Gamma \Longleftrightarrow \Longleftrightarrow < f(v), f(y) > \in \Gamma$. Заметим, что отношение изоморфизма на множестве ориентированных графов есть отношение эквивалентности.

Последовательность дуг графа такая, что начало каждой последующей дуги совпадает с концом предыдущей называется *путем*. *Длиной* пути называется число входящих в него дуг, при-

чем каждая дуга считается столько раз, сколько она встречалась в пути. Путь обозначается упорядоченной последовательностью входящих в него вершин или дуг.

Пример 4.3. Путь, изображенный на рис. 4.3 можно обозначить как $< v_1, v_2 >, < v_2, v_3 >, < v_3, v_4 >$ или v_1, v_2, v_3, v_4.

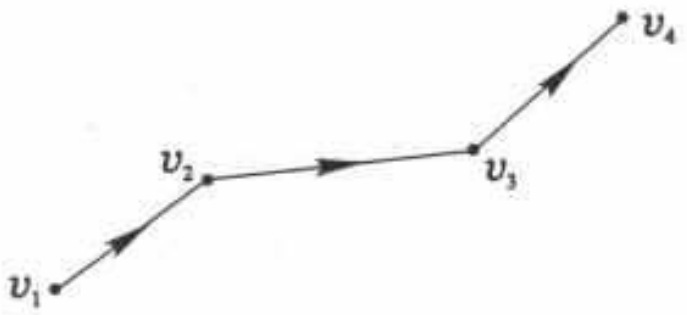


Рис. 4.3.

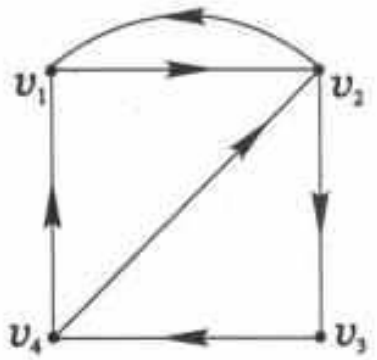


Рис. 4.4.

Путь, у которого начало первой дуги совпадает с концом предпоследней, называется *контуром*. Путь (контур) называется *простым*, если все его дуги различны. Путь (контур) называется *элементарным*, если все его вершины различны (за исключением первой и последней).

Пример 4.4. В графе, изображенном на рис. 4.4 последовательность дуг $< v_1, v_2 >, < v_2, v_3 >, < v_3, v_4 >, < v_4, v_2 >, < v_2, v_1 >$ — простой, но не элементарный контур.

В дальнейшем часто будем использовать следующее утверждение.

Утверждение 4.1. *Из каждого пути, соединяющего вершины v и y можно выделить простой путь, соединяющий эти вершины.*

Доказательство проведем индукцией по числу n дуг пути. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть для всех путей, содержащих менее чем n дуг утверждение верно. Докажем его для путей с n дугами. Пусть последовательность вершин $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$, где $v_1 = v$, $v_{n+1} = y$ — один из таких путей. Если все вершины этого пути различны, то он простой. В противном случае, некоторые две его вершины v_i и v_j совпадают. Если $i = 1$, то $v_1, v_{j+1}, \dots, v_{n+1}$ — путь, соединяющий вершины v и y и содержащий $n - 1$ дугу; если $i \geqslant 2$, то таким путем

является путь $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_j, \ldots, v_{n+1}$. По индуктивному предположению, из каждого из этих путей можно выделить простой путь, соединяющий вершину v и y.

Для неориентированных графов используют те же термины: «смежность», «изолированность», «инцидентность», «петля», «подграф», что и для неориентированных графов, и некоторые новые термины.

Цепью в неориентированном графе $G =< V, Q >$ называется последовательность ребер, которая может быть превращена в путь введением соответствующей ориентации на ребра. *Длиной цепи* называется число входящих в нее ребер, причем каждое ребро считается столько раз, сколько оно встречалось в цепи. Цепь, у которой первая вершина совпадает с последней называется *циклом*. Цепь (цикл) называется *простой*, если в ней никакое ребро не встречается дважды. Цепь (цикл) называется *элементарной*, если все ее вершины (за исключением первой и последней) различны.

По аналогии с утверждением 4.1 можно доказать, что из каждой цепи, соединяющей вершины v и y можно выделить простую цепь, соединяющую эти вершины.

Неориентированный граф $G =< V, Q >$ называется *связным*, если любая пара его вершин соединена цепью. *Компонентой связности* графа $G =< V, Q >$ называется максимальный связный подграф (т. е. не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа $G =< V, Q >$).

Пример 4.5. На рис. 4.5, *а*) изображен граф с тремя компонентами связности, указанными на рис. 4.5, *б*), *в*), *г*).

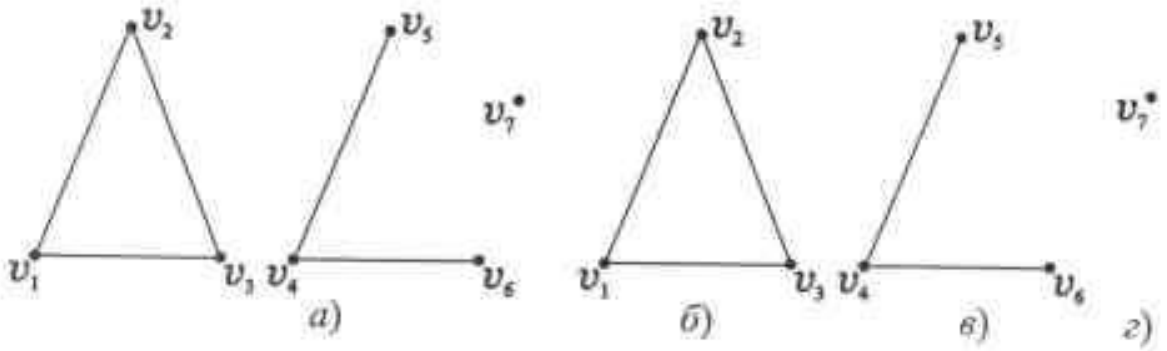


Рис. 4.5.

Пусть $G = (V, Q)$ неориентированный граф с n вершинами m ребрами и p компонентами связности. Тогда число $\gamma(G) = m - n + p$ называется *цикломатическим числом графа* G. Если

G связный граф, то $p = 1$ и $\gamma(G) = m - n + 1$.

В неориентированном графе можно определить понятие *расстояния* $d(v, y)$ между вершинами v и y, считая его равным числу ребер в кратчайшей простой цепи, соединяющей вершины v и y, и положив $d(v, y) = \infty$, если такой цепи нет. Расстояние $d(v, y)$ удовлетворяет аксиомам метрики:

1. $d(v, y) \geqslant 0$ и $d(v, y) = 0$ тогда и только тогда, когда вершины v и y совпадают.
2. $d(v, y) = d(y, v)$.
3. $d(v, y) + d(y, z) \geqslant d(v, z)$.

Заметим, что если попытаться аналогично определить понятие расстояния в ориентированном графе, то не выполнится аксиома 2.

В ориентированном графе $G =< V, \Gamma >$ с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ вершина v_j называется *достижимой* из вершины v_i, если существует путь из v_i в v_j. Граф называется *односторонне связным*, если для любых двух его вершин по крайней мере одна достижима из другой. Если одновременно каждая вершина v_i достижима из v_j и v_j достижима из v_i, то граф называется *сильно связным*.

Компонентой односторонней связности (*сильной связности*) называется максимальный односторонне связный (сильно связный) подграф данного графа.

Для иллюстрации понятия сильной связности рассмотрим следующую задачу. Пусть граф $G =< V, \Gamma >$ представляет структуру руководства или «влияний» в некоторой организации. Требуется выделить множество сотрудников, которые имеют равную власть или оказывают равное влияние друг на друга (например, составляют комитет). Если множество V вершин графа — это множество сотрудников данной организации, и две вершины v и y соединены дугой $< v, y >$ тогда и только тогда, когда v имеет влияние на y, то множество сотрудников, имеющих равное влияние — это элементы одной компоненты сильной связности.

Задачи и упражнения

4.2. Матричное задание графа

4.2.1. Матрицы смежности и матрицы инциденций

Для задания графов обычно используют матрицы смежности и матрицы инциденций. Матричное задание графа удобно, например, при решении задач с использованием вычислительных машин.

Пусть $G =< V, \Gamma >$ — ориентированный граф с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, у которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если существует дуга, исходящая из } v_i \\ & \quad \text{и заходящая в } v_j; \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

называется *матрицей смежности* ориентированного графа G.

Аналогично определяется матрица смежности неориентированного графа $G =< V, Q >$ с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Его матрица смежности $A = \|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ задается условием

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ смежны;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что матрица смежности неориентированного графа — симметрическая.

Более информативной, чем матрица смежности является матрица *инциденций*.

Пусть $G =< V, \Gamma >$ — ориентированный граф без петель с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и множеством дуг $\Gamma = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$. Матрица $B = \|b_{ij}\|$ порядка $n \times m$ у которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } u_j \text{ исходит из вершины } v_i, \\ -1, & \text{если дуга } u_j \text{ заходит в вершину } v_i, \\ 0, & \text{если дуга } u_j \text{ не инцидентна вершине } v_i \end{cases}$$

называется *матрицей инциденций* ориентированного графа G.

Для неориентированного графа без петель $G =< V, Q >$ с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и множеством ребер $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ матрица инциденций $B = \|b_{ij}\|$ порядка $n \times m$ задается условием

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } q_j \text{ инцидентно вершине } v_i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример 4.6. Матрицы смежности графов, изображенных на рис. 4.6 равны соответственно

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы инциденций графов, изображенных на рис. 4.6 равны соответственно

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

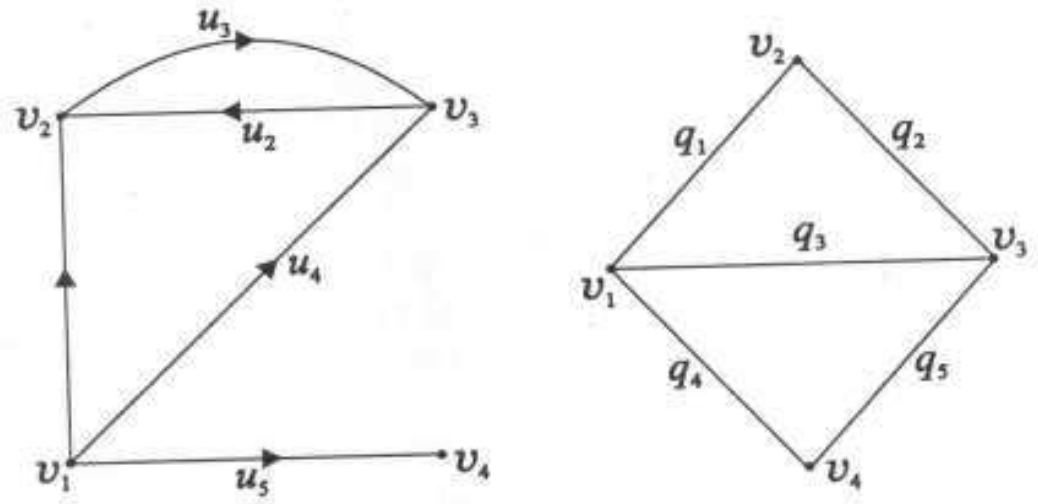


Рис. 4.6.

Приведем некоторые очевидные свойства матриц смежности и матриц инциденций:

1) Для неориентированного графа $G =< V, Q >$ сумма элементов i-ой строки (или i-го столбца) матрицы смежности A равна степени вершины v_i.

2) Для ориентированного графа $G =< V, \Gamma >$ сумма строк матрицы инцидентной B является нулевой строкой; ранг матрицы B не превосходит $n-1$.

Используя матрицы смежности и инциденций можно ответить на многие вопросы, связанные со свойствами графов. В качестве примера приведем оценку числа путей (цепей) с фиксированной длиной.

Обозначим k-ю степень матрицы смежности A относительно обычной операции умножения матриц через $A^k = \|a_{ij}^{(k)}\|$.

Утверждение 4.2. *Число всех путей (цепей) длины k из вершины v_i в вершину v_j равно элементу $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A^k.*

Доказательство проведем индукцией по k. При $k = 1$ справедливость утверждения следует из определения матрицы смежности. [illegible] что оно выполняется для всех путей

Задачи и упражнения

1. Нарисовать все графы с пятью вершинами (число таких графов — 34).

2. Доказать, что любая замкнутая цепь нечетной длины содержит простой цикл.

3. Доказать или опровергнуть:

а) объединение любых двух различных элементарных цепей, соединяющих две вершины, содержит простой цикл;

б) объединение любых двух различных простых цепей, соединяющих две вершины, содержит простой цикл.

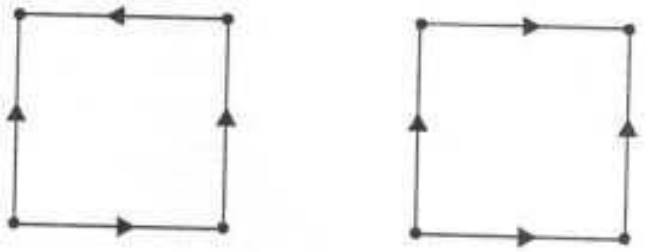
4. Сумма степеней вершин неориентированного графа равна удвоенному числу его ребер («лемма о рукопожатии»):

$$\sum_{v_i \in V} deg\, v_i = 2m$$

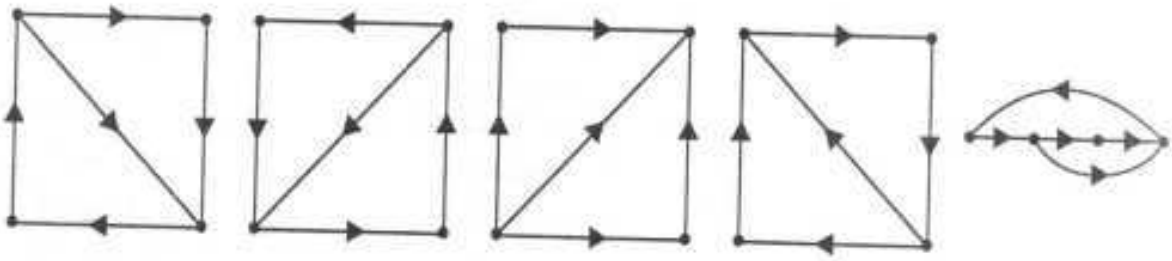
(поскольку в каждом рукопожатии участвуют две руки, то при любом числе рукопожатий общее число пожатых рук четно).

5. В любом неориентированном графе число вершин с нечетными степенями четно.

6. Доказать, что следующие графы неизоморфны.



7. Являются ли изоморфными графы:

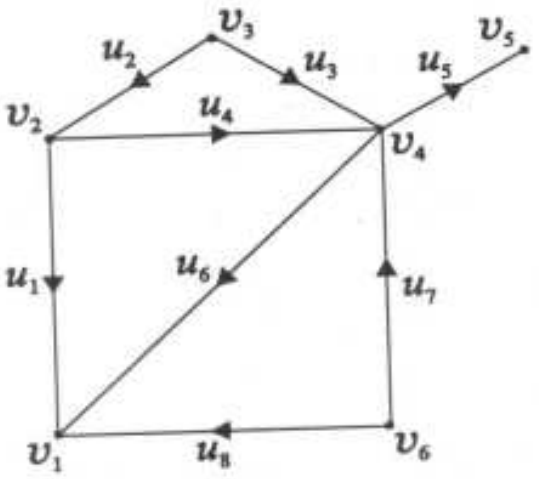


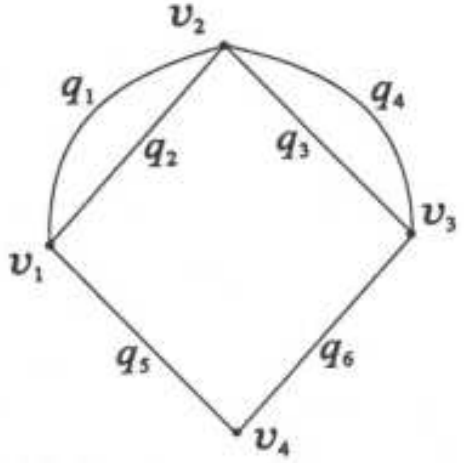
8. Показать, что число компонент связности графа G совпадает с числом элементов фактор-множества множества вершин G по отношению связности.

9. Построить графы отношений $x \equiv y(mod\ 3)$ и $x\rho y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + y \geqslant 4$ на множестве вершин $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Задачи и упражнения

1. Найти матрицу смежности и матрицу инциденций для графов:





2. Изобразить графы, заданные матрицей смежности A и матрицей инциденций B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Найти матрицу связности для графа, заданного матрицей смежности