

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ СТУДЕНТАМ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Семестр I

Раздел 1. Векторная и линейная алгебра

Литература [1], гл. 9, 10.

Основные вопросы.

1. Определители второго и третьего порядков. (Гл. 10, § 2)
2. Понятие вектора. Координаты вектора. (Гл. 9, § 2)
3. Линейные операции над векторами. Условие коллинеарности векторов. (Гл. 9, §§ 3 - 5)
4. Скалярное произведение векторов: определение и основные свойства. Скалярное произведение векторов в координатах. (Гл. 9, § 6)
5. Угол между двумя векторами. Условие перпендикулярности двух векторов. (Гл. 9, § 6)
6. Векторное произведение векторов: определение и основные свойства. Векторное произведение векторов в координатах (Гл. 9, § 7)
7. Площадь параллелограмма. (Гл. 9, § 7)
8. Смешанное произведение векторов: определение и основные свойства. Смешанное произведение векторов в координатах. (Гл. 9, § 8)
9. Условие компланарности векторов. Объем тетраэдра (Гл.9, § 8)

Рассмотрим решение некоторых задач по данной теме.

Пример 1. Даны вершины треугольника $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$ и $C(1;-2;1)$. Определить его внутренний угол при вершине A .

Решение. Искомый угол $\hat{A}$ - это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найдем координаты этих векторов по формуле $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ (из координат конца M_2 вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ вычитаются координаты его начала M_1):

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \{5-3; 1-2; -1-(-3)\} = \{2; -1; 2\}, \\ \overrightarrow{AC} &= \{1-3; -2-2; 1-(-3)\} = \{-2; -4; 4\}.\end{aligned}$$

Вычислим косинус угла $\hat{A}$ по формуле $\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|}$, где $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ - скалярное произведение векторов, а $|\overrightarrow{AB}|$ и $|\overrightarrow{AC}|$ - длины векторов. Эта формула в координатах имеет следующий вид: $\cos \hat{A} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$, где $\overrightarrow{AB} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$,

$\overrightarrow{AC} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$. Подставляя координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ в эту формулу, получим $\cos \hat{A} = \frac{2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-4) + 2 \cdot 4}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{4+16+16}} = \frac{8}{3 \cdot 6} = \frac{4}{9}$.

Ответ: $\hat{A} = \arccos \frac{4}{9} \approx 63.61^\circ$.

Пример 2. Даны вершины треугольника $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$. Вычислить площадь треугольника ABC .

Решение. Площадь треугольника ABC найдем по формуле $S = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{2}$, где

$\overline{AB} \times \overline{AC}$ - векторное произведение. Вычислим координаты этих векторов: $\overline{AB} = \{2; -2; -3\}$, $\overline{AC} = \{4; 0; 6\}$. Векторное произведение векторов $\overline{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ и $\overline{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$ находится по формуле:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}.$$

Здесь и далее две вертикальные линии применяются для записи определителя. Определения определителей первого и второго порядков, их свойства и вычисление см. [1], гл. 10, § 2.

$$\begin{aligned} \overline{AB} \times \overline{AC} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}((-2) \cdot 6 - 0 \cdot (-3)) - \bar{j}(2 \cdot 6 - 4 \cdot (-3)) + \bar{k}(2 \cdot 0 - 4 \cdot (-2)) = -12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k}. \end{aligned}$$

Таким образом, вектор $\overline{AB} \times \overline{AC} = \{-12; -24; 8\}$.

Вычислим длину этого вектора:

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \sqrt{4^2(3^2 + 6^2 + 2^2)} = 4 \cdot 7 = 28.$$

Ответ: $S = 14$.

Пример 3. Установить, компланарны ли векторы $\overline{a} = \{2; 3; -1\}$, $\overline{b} = \{1; -1; 3\}$, $\overline{c} = \{1; 9; -11\}$.

Решение. Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны, если смешанное произведение $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$. Смешанное произведение векторов $\overline{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$, $\overline{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, $\overline{c} = \{X_3; Y_3; Z_3\}$ находится по формуле:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \text{ Подставим координаты векторов } \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}:$$

$$\begin{aligned} \overline{a}\overline{b}\overline{c} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -11 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = \\ &= 2(11 - 27) - 3(-11 - 3) - 1(9 + 1) = -32 + 42 - 10 = 0. \end{aligned}$$

Ответ: Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ компланарны.

Раздел 2. Аналитическая геометрия

Тема 1. Аналитическая геометрия на плоскости

Литература [1], гл. 3.

Основные вопросы.

1. Деление отрезка в данном отношении. (§ 2)
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. (§ 6)
3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку, с данным угловым коэффициентом. (§ 6)

4. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. (§ 6)
5. Угол между двумя прямыми. (§ 6)
6. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. (§ 6)
7. Общее уравнение прямой. (§ 6)
8. Расстояние от точки до прямой. (§ 6)

Рассмотрим решение некоторых задач по данной теме.

Пример 1. Даны три вершины $A(-3;-1)$, $B(2;2)$, $C(9;1)$ параллелограмма $ABCD$. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.

Решение. Для нахождения уравнений сторон AB и BC воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Следовательно, уравнение стороны AB имеет вид: $\frac{x+3}{2+3} = \frac{y+1}{2+1}$ или $\frac{x+3}{5} = \frac{y+1}{3}$. Приведем это уравнение к уравнению прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$: $3(x+3) = 5(y+1)$, $3x+9 = 5y+5$, $3x-5y+4 = 0$, $y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$.

Аналогично находим уравнение стороны BC : $\frac{x-2}{9-2} = \frac{y-2}{1-2}$, $-(x-2) = 7(y-2)$ или $y = -\frac{1}{7}x + \frac{16}{7}$.

Напишем уравнение стороны CD , параллельной AB . Для этого используем тот факт, что условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов: $k_2 = k_1$. Угловым коэффициентом прямой AB : $k_1 = \frac{3}{5}$. Далее воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$, с данным угловым коэффициентом k : $y - y_0 = k(x - x_0)$. Итак, уравнение стороны CD , проходящей через точку $C(9;1)$ и имеющей угловой коэффициент $k_2 = \frac{3}{5}$, можно записать в виде: $y - 1 = \frac{3}{5}(x - 9)$ или $y = \frac{3}{5}x - \frac{22}{5}$.

Аналогично найдем уравнение стороны AD , параллельной BC . Прямая AD проходит через точку $A(-3;-1)$ и имеет угловой коэффициент $k = -\frac{1}{7}$. Следовательно, ее уравнение будет иметь вид $y + 1 = -\frac{1}{7}(x + 3)$ или $y = -\frac{1}{7}x - \frac{10}{7}$.

Ответы: AB : $y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}$; BC : $y = -\frac{1}{7}x + \frac{16}{7}$; CD : $y = \frac{3}{5}x - \frac{22}{5}$; AD : $y = -\frac{1}{7}x - \frac{10}{7}$.

Пример 2. Даны две точки $A(-3;1)$, $B(9;5)$. На отрезке AB найти координаты точки C , делящей этот отрезок пополам.

Решение. Пусть точки A, B, C имеют координаты $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, где точка C является серединой отрезка AB , тогда можно написать, что $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Следовательно, в данном случае получаем: $x_3 = \frac{-3+9}{2} = 3$, $y_3 = \frac{1+5}{2} = 3$.

Ответ: $C(3;3)$.

Пример 3. Даны две точки $A(-3;1)$, $B(9;6)$. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $C(5;-2)$ перпендикулярно отрезку AB .

Решение. Вектор $\overline{N} = \overline{AB} = (12; 5)$ является нормальным вектором искомой прямой. Пусть $M(x; y)$ произвольная точка прямой, тогда вектор $\overline{CM} = (x - 5; y + 2)$ - это вектор, лежащий на данной прямой. Следовательно, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CM}$ перпендикулярны. Условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения: $\overline{AB} \cdot \overline{CM} = 0$. Запишем это условие в координатах: $12 \cdot (x - 5) + 5 \cdot (y + 2) = 0$, или $12x + 5y - 50 = 0$.

Ответ: $12x + 5y - 50 = 0$.

Тема 2. Аналитическая геометрия в пространстве

Литература [1], гл. 9.

Основные вопросы.

1. Общее уравнение плоскости. Геометрический смысл коэффициентов уравнения. (§ 11)
2. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. (§ 11)
3. Расстояние от точки до плоскости. (§ 11)
4. Канонические и параметрические уравнения прямой. (§ 12)
5. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. (§ 12)
6. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости (§ 13)

Рассмотрим решение некоторых задач по данной теме.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(2; -1; 3)$, $M_1(3; 1; 2)$ $M_2(4; 2; 1)$

Решение. Для того чтобы составить уравнение плоскости, нужно взять произвольную точку $M(x; y; z)$, лежащую на этой плоскости. Далее запишем координаты трех векторов: $\overline{M_0M} = (x - 2; y + 1; z - 3)$, $\overline{M_0M_1} = (1; 2; -1)$ и $\overline{M_0M_2} = (2; 3; -2)$. Эти векторы должны быть компланарными. Условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения. Запишем это условие в координатах:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим получившийся определитель разложением определителя по первой строке:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdot (x-2) - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \cdot (y+1) + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot (z-3) = 0$$

После вычисления трех определителей второго порядка получаем:

$$-1(x-2) - 0(y+1) - 1(z-3) = 0 \quad \text{или} \quad -x - z + 5 = 0.$$

Ответ: $x + z - 5 = 0$.

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; -1; 0)$, перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z+1}{4}$.

Решение. Будем искать уравнение плоскости в следующем виде: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. В этом уравнении коэффициенты A, B, C являются координатами нормального вектора $\vec{N}$ этой плоскости, а координаты x_0, y_0, z_0 – координатами точки M_0 , лежащей на этой плоскости. По условию задачи точка $M_0(2; -1; 0)$ лежит на искомой плоскости, а в качестве нормального вектора $\vec{N}$ плоскости можно взять направляющий вектор $\vec{a} = (3; -5; 4)$ данной прямой, поскольку эта прямая перпендикулярна искомой плоскости. Подставляя эти данные в уравнение, получим $3(x - 2) - 5(y + 1) + 4(z - 0) = 0$ или $3x - 5y + 4z - 11 = 0$.

Ответ: $3x - 5y + 4z - 11 = 0$.

Пример 3. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; -1; 0)$, перпендикулярно плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$.

Решение. Канонические уравнения прямой имеют вид: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$, здесь x_0, y_0, z_0 – координаты точки M_0 , лежащей на этой прямой, а l, m, n – координаты направляющего вектора $\vec{a}$ этой прямой. По условию задачи нормальный вектор плоскости $\vec{N} = (2; 3; 1)$ параллелен искомой прямой, следовательно, вектор $\vec{N}$ можно взять в качестве направляющего вектора $\vec{a}$ искомой прямой. Следовательно, канонические уравнения искомой прямой будут иметь вид: $\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z}{1}$.

Ответ: $\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z}{1}$.

Пример 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; -1; 3)$, параллельно плоскости $7x - 3y + 2z - 8 = 0$.

Решение. Будем искать уравнение плоскости в следующем виде: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ (см. решение **Примера 2**). В качестве нормального вектора искомой плоскости можно взять нормальный вектор $\vec{N} = (7; -3; 2)$ данной плоскости, так как данная плоскость параллельна искомой плоскости. Таким образом, уравнение плоскости будет иметь вид: $7(x - 2) - 3(y + 1) + 2(z - 3) = 0$ или $7x - 3y + 2z - 23 = 0$.

Ответ: $7x - 3y + 2z - 23 = 0$.

Пример 5. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; -2; 3)$, параллельно отрезку AB , где $A(2; 5; -3)$ и $B(3; -1; 1)$,

Решение. По условию задачи точка $M_0(2; -2; 3)$ лежит на искомой прямой. Вектор $\vec{a} = \vec{AB} = (1; -6; 4)$ параллелен этой прямой, следовательно, этот вектор можно взять в качестве направляющего вектора искомой прямой. Запишем канонические уравнения искомой прямой: $\frac{x - 2}{1} = \frac{y + 2}{-6} = \frac{z - 3}{4}$.

Ответ: $\frac{x - 2}{1} = \frac{y + 2}{-6} = \frac{z - 3}{4}$.

Пример 6. Найти точку пересечения прямой $\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z}{6}$ и плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$.

Решение. В условии задачи даны канонические уравнения прямой. Перейдем к параметрическим уравнениям этой прямой. Введем параметр t : $\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z}{6} = t$ и выразим x, y, z через t : $\frac{x - 1}{1} = t \Rightarrow x = t + 1$, $\frac{y + 1}{-2} = t \Rightarrow y = -2t - 1$, $\frac{z}{6} = t \Rightarrow z = 6t$.

Уравнения $x = t + 1$, $y = -2t - 1$, $z = 6t$ являются параметрическими уравнениями прямой. Для того, чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости, нужно решить систему уравнений, состоящую из параметрических уравнений прямой и уравнения плоскости:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t - 1 \\ z = 6t \\ 2x + 3y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t - 1 \\ z = 6t \\ 2(t + 1) + 3(-2t - 1) + 6t - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t - 1 \\ z = 6t \\ 2t - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t - 1 \\ z = 6t \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 6 \\ t = 1 \end{cases}$$

Точка $(2; -3; 6)$ является пересечением прямой и плоскости.

Ответ: $(2; -3; 6)$.

Раздел 3. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Тема 1. Введение в математический анализ

Литература. [1], гл. 2, 4.

Основные вопросы.

1. Числовые последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Основные свойства бесконечно малых последовательностей. (Гл. 2, § 1)
2. Предел последовательности, основные свойства пределов. (Гл. 2, § 2).
3. Монотонные последовательности, признак сходимости монотонных последовательностей. Число e . (Гл. 2, § 3)
4. Предел функции, теоремы о пределах функций. (Гл. 4, §§ 1-3)
5. Первый и второй замечательные пределы. (Гл. 4, § 4).
6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. (Гл. 4, §§ 5, 6)
7. Понятие непрерывности функции. Арифметические действия над непрерывными функциями. Непрерывность некоторых элементарных функций. Непрерывность сложной и обратной функций. (Гл. 4, §§ 7, 8).
8. Классификация точек разрыва функции. (Гл. 4, § 9).
9. Основные свойства непрерывных на отрезке функций. Теорема о прохождении функции через любое промежуточное значение, теорема об ограниченности непрерывной функции, теорема о достижении непрерывной функцией своих наибольшего и наименьшего значений на отрезке. (Гл. 4, § 10).

Важнейшими понятиями этой темы являются понятия предела последовательности, предела функции, непрерывности функции.

Рассмотрим решения некоторых задач на вычисление пределов (не используя правило Лопиталя).

Пример 1. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - x + 2}{1 - 4x^3}$.

Решение. При $x \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель неограниченно возрастают по абсолютной величине, т.е. являются бесконечно большими функциями. В таком случае гово-

рят, что имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, разделим числитель и знаменатель на x^3 (x в наибольшей степени)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - x + 2}{1 - 4x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^3} - 4} = \frac{0 - 0 + 0}{0 - 4} = 0.$$

Ответ: 0.

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 + x} + \sqrt[3]{27x^6 + 2}}{3x^2 - x + 2}$.

Решение. В этом примере также как и в **Примере 1** имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 + x} + \sqrt[3]{27x^6 + 2}}{3x^2 - x + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^5}} + \sqrt[3]{27 + \frac{2}{x^6}} \right)}{x^2 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^5}} + \sqrt[3]{27 + \frac{2}{x^6}}}{3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1 + 3}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Пример 3. Найти $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{9+2x}}{3x^2 + 10x - 8}$.

Решение. Числитель и знаменатель функции $f(x) = \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{9+2x}}{3x^2 + 10x - 8}$ стремятся к

нулю при $x \rightarrow -4$. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Для того, чтобы раскрыть эту неопределенность, сделаем следующие преобразования:

- 1) умножим числитель и знаменатель на «сопряженное» числителю выражение $\sqrt{5+x} + \sqrt{9+2x}$;
- 2) разложим на множители квадратный трехчлен знаменателя по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена. В этом примере: $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{2}{3}$;
- 3) сократим дробь на общий множитель $x + 4$, который обращает в нуль знаменатель и числитель.

В результате получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{9+2x}}{3x^2 + 10x - 8} &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(\sqrt{5+x} - \sqrt{9+2x})(\sqrt{5+x} + \sqrt{9+2x})}{(3x^2 + 10x - 8)(\sqrt{5+x} + \sqrt{9+2x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(\sqrt{5+x})^2 - (\sqrt{9+2x})^2}{(3x^2 + 10x - 8)(\sqrt{5+x} + \sqrt{9+2x})} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{5+x - (9+2x)}{(3x^2 + 10x - 8)(\sqrt{5+x} + \sqrt{9+2x})} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{-x-4}{3(x+4)\left(x-\frac{2}{3}\right)(\sqrt{5+x}+\sqrt{9+2x})} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{-(x+4)}{(x+4)(3x-2)(\sqrt{5+x}+\sqrt{9+2x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{-1}{(3x-2)(\sqrt{5+x}+\sqrt{9+2x})} = \frac{-1}{-14 \cdot (1+1)} = \frac{1}{28}$$

Ответ: $\frac{1}{28}$

Рассмотрим примеры, в которых при вычислении пределов применяется следующая теорема:

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: 1) $\alpha(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta(x)$, $\beta_1(x)$ - бесконечно малые (бесконечно большие) функции при $x \rightarrow a$, 2) имеет место эквивалентность функций $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \rightarrow a$, 3) существует предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Приведем таблицу эквивалентных бесконечно малых функций.

Таблица 1

При $x \rightarrow 0$		
1. $\sin x \sim x$,	2. $\operatorname{tg} x \sim x$,	3. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$,
4. $\arcsin x \sim x$,	5. $\operatorname{arctg} x \sim x$,	6. $\ln(1+x) \sim x$,
7. $e^x - 1 \sim x$,	8. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.	

Пример 4. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x \sin x} - 1}{1 - \cos 4x}$.

Решение. Числитель и знаменатель функции $\frac{e^{3x \sin x} - 1}{1 - \cos 4x}$ стремятся к нулю при $x \rightarrow 0$, т.е. имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Найдем предел этой функции, заменяя числитель и знаменатель эквивалентными функциями. Согласно таблице 1 (см. формулы 7, 3, 1) имеем

$$e^{3x \sin x} - 1 \sim 3x \sin x, \quad 1 - \cos 4x \sim \frac{(4x)^2}{2}; \quad \sin x \sim x \text{ при } x \rightarrow 0. \text{ Поэтому}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x \sin x} - 1}{1 - \cos 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \sin x}{\frac{(4x)^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 3x \cdot x}{16x^2} = \frac{3}{8}.$$

Ответ: $\frac{3}{8}$.

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{4}}$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{3x+2} = 1$, а $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{4} = \infty$, то имеет место неопределенность вида 1^∞ . Вычислим предел, применяя логарифмическую формулу $A = e^{\ln A}$ и заменяя

бесконечно малую функцию $\ln\left(1+\left(\frac{3x-1}{3x+2}-1\right)\right)$ при $x \rightarrow \infty$ эквивалентной $\left(\frac{3x-1}{3x+2}-1\right)$ (см. формулу 6 таблицы 1)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{4}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\ln \frac{3x-1}{3x+2}}\right)^{\frac{x+1}{4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x+1}{4} \ln \frac{3x-1}{3x+2}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{4} \ln \frac{3x-1}{3x+2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{4} \ln\left(1+\left(\frac{3x-1}{3x+2}-1\right)\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{4} \left(\frac{3x-1}{3x+2}-1\right)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{4} \cdot \frac{-3}{3x+2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3(1+1/x)}{4(3+2/x)}} = e^{-\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

Ответ: $e^{-1/4}$.

Пример 6. Найти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$.

Решение. В этом примере имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Сделаем замену переменных: $x = \frac{\pi}{4} + t$, здесь $t \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + t - \frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2t\right)}{\sin t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin 2t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-2t}{t} = -2.\end{aligned}$$

Ответ: -2 .

Тема 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Литература. [1], гл.5, 6; [2], гл. III-V.

Основные вопросы.

1. Определение производной (физический и геометрический смысл производной). ([1], гл. 5, § 1)
2. Таблицы основных формул дифференцирования. ([1], гл. 5, §§ 4, 9)
3. Дифференциал. ([1], гл. 5, §§ 2, 3)
4. Вторая производная. ([1], гл. 5, § 10). Механический смысл второй производной. ([2], гл. III, § 25)
5. Касательная к графику функции; уравнение касательной. ([2], гл. III, § 26)
6. Теоремы Ферма, Роля, Лагранжа. ([1], гл. 6 § 1)
7. Правило Лопиталя. ([1], гл. 6 § 2)
8. Исследование функции на возрастание и убывание. ([1], гл. 6 § 4)
9. Экстремумы функции. ([1], гл. 6 § 2)
10. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке. ([2], гл. V § 6)
11. Выпуклость графика функции. Точки перегиба. ([1], гл. 6 § 4)
12. Асимптоты. ([1], гл. 6 § 4)
13. Построение графиков функции. ([1], гл. 6 § 4)

Рассмотрим решение некоторых задач по данной теме.

Пример 1. Найти производные функций указанного порядка а) $y = 3\operatorname{ctg} x + \frac{e^x}{1-x}$, найти y' ;

б) $y = \sin^3 x$, найти y' и y'' .

Решение. Рассмотрим п. а).

1. Сначала применим правило дифференцирования суммы $(u+v)' = u' + v'$;
2. При дифференцировании первого слагаемого используем формулу: $(cf(x))' = c(f(x))'$, где c - постоянная;
3. При дифференцировании второго слагаемого используем формулу: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

В результате получим

$$\begin{aligned} y' &= \left(3\operatorname{ctg} x + \frac{e^x}{1-x}\right)' = (3\operatorname{ctg} x)' + \left(\frac{e^x}{1-x}\right)' = 3(\operatorname{ctg} x)' + \\ &+ \frac{(e^x)'(1-x) - (1-x)'e^x}{(1-x)^2} = 3\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) + \frac{e^x(1-x) - (-1)e^x}{(1-x)^2} = \\ &= -\frac{3}{\sin^2 x} + \frac{e^x(1-x+1)}{(1-x)^2} = -\frac{3}{\sin^2 x} + \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Рассмотрим п. б). Замечая, что $y = \sin^3 x$ является сложной функцией $y = u^3$, где $u = \sin x$, применим правило дифференцирования сложной функции: $(y(u(x)))'_x = y'_u \cdot u'_x$. Получим: $y'_x = (u^3)'_u \cdot u'_x = 3u^2 \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$.

Найдем y'' . Поскольку $y'' = (y')'$, то

$$\begin{aligned} y'' &= (3\sin^2 x \cos x)' = 3(\sin^2 x \cdot \cos x)' = 3\left((\sin^2 x)' \cos x + \sin^2 x (\cos x)'\right) = \\ &= 3\left(2\sin x (\sin x)' \cos x + \sin^2 x (-\sin x)\right) = \\ &= 3\left((2\sin x \cos x) \cos x - \sin^3 x\right) = 3(\sin 2x \cos x - \sin^3 x). \end{aligned}$$

При вычислении производной использовали формулу производной произведения двух функций: $(u \cdot v)' = u'v + u v'$ и правило дифференцирования сложной функции: $(y(u(x)))'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Ответы: а) $y' = \frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2} - \frac{3}{\sin^2 x}$; б) $y' = 3\sin^2 x \cos x$,
 $y'' = 3(\sin 2x \cos x - \sin^3 x)$.

Пример 2. Найти дифференциал функции $y = (\cos x)^{\sin x}$.

Решение. По определению дифференциал функции равен $dy = y' dx$. Вычислим с помощью логарифмической производной производную показательной-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$, где u и v - функции от x (в этом примере $u = \cos x$, а $v = \sin x$). Так как

$\ln y = v(x) \ln u(x)$ и $(\ln y(x))' = \frac{1}{y} \cdot y'$ то $\frac{1}{y} \cdot y' = (v \ln u)'$. Отсюда $y' = y \cdot (v \ln u)'$. Значит для данной функции:

$$\begin{aligned} y' &= (\cos x)^{\sin x} (\sin x \cdot \ln \cos x)' = (\cos x)^{\sin x} ((\sin x)' \ln \cos x + \sin x (\ln \cos x)') = \\ &= (\cos x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln \cos x + \sin x \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) \right) = \\ &= (\cos x)^{\sin x} (\cos x \cdot \ln \cos x - \operatorname{tg} x \cdot \sin x). \end{aligned}$$

Тогда дифференциал функции

$$dy = ((\cos x)^{\sin x})' dx = (\cos x)^{\sin x} (\cos x \cdot \ln \cos x - \operatorname{tg} x \cdot \sin x) dx$$

Ответ: $dy = (\cos x)^{\sin x} (\cos x \cdot \ln \cos x - \operatorname{tg} x \cdot \sin x) dx$

Пример 3. Вычислить пределы, используя правило Лопиталя

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Решение. а) Пределы числителя и знаменателя равны 0, значит, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. По правилу Лопиталя имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\sin^2 x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}.$$

б) Рассмотрим $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$. Поскольку $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, то имеем неопределенность вида $\infty \cdot 0$. Так как $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, то можно преобразовать эту неопределенность к виду $\frac{\infty}{\infty}$, а затем применить правило Лопиталя. В результате получаем:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

в) Рассмотрим $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} = \infty$ ($\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = e^0 - 1 = 0$), то имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Сведем ее к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, приводя дроби к общему знаменателю, а затем применим дважды правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x(e^x - 1))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{1 \cdot (e^x - 1) + x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x e^x} \\ &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(e^x - 1 + x e^x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x (2 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

г) Рассмотрим $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. Так как $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, а $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty$, то имеем неопределенность вида 1^∞ . Используя основное логарифмическое тождество $A = e^{\ln A}$, получим

$$(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = (e^{\ln \sin x})^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \ln \sin x}.$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\operatorname{tg} x \ln \sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \ln \sin x}.$$

Найдем

предел

показателя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \ln \sin x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \ln \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\cos x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\ln \sin x)'}{(\cos x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0. \end{aligned}$$

При вычислении этого предела использовано правило Лопиталья поскольку пределы числителя и знаменателя равны нулю: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \sin x = \ln 1 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

$$\text{Следовательно, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$$

Ответы: а) $\frac{1}{2}$; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; г) 1.

Пример 4. Провести полное исследование функции $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ и построить ее график.

Решение. Исследуем функцию согласно схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
3. Найти точки разрыва функции и асимптоты графика функции.
4. Найти интервалы монотонности, точки экстремума функции, а также максимальные и минимальные значения функции.
5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика и точки перегиба.
6. Построить график функции, учитывая исследование, проведенное в п.п. 1 – 5.

Для данной функции:

1. Область определения функции $D_f = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
2. Точки пересечения графика с осями координат:

а) с осью Ox : $y = 0$, тогда $\frac{x^2}{1-x} = 0$, откуда $x = 0$;

б) с осью Oy : $x = 0$, тогда $y = \frac{0}{1-0} = 0$.

График пересекает оси в начале координат. Найдем интервалы знакопостоянства функции, т.е. интервалы, где она положительна и интервалы, где она отрицательна. Функция $f(x) > 0$, при $\frac{x^2}{1-x} > 0$, т.е. при $1-x > 0$, $x < 1$. Итак, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 1)$;

$f(x) < 0$ при $x \in (1; +\infty)$.

3. Точка разрыва: $x = 1$.

Асимптоты: $x=1$ - вертикальная асимптота, так как $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{1-x} = \infty$. Найдем уравнение наклонной асимптоты: $y = kx + b$.

Угловой коэффициент $k = -1$, т.к. $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{(1-x)x} = -1$, и $b = -1$, т.к.

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{1-x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{1-x} = -1.$$

Таким образом, $y = -x - 1$ - наклонная асимптота графика.

4. Найдем производную функции

$$f'(x) = \frac{2x(1-x) - x^2(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2} = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}.$$

Найдем критические точки первой производной: $f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$; производная не существует при $x = 1$, но в точке $x = 1$ данная функция не определена. Итак, критическими точками являются точки $x = 0$ и $x = 2$. Изучим поведение функции на всей числовой оси. Результаты представим в таблице 2.

Таблица 2

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	не существует	+	0	-
$f(x)$	убывает	0 min	возрастает	не существует	возрастает	-4 max	убывает

5. Найдем производную второго порядка

$$f''(x) = \frac{(2-2x)(1-x)^2 + 2(2x-x^2)(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2-2x-2x+2x^2+4x-2x^2}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

$f''(x) > 0$ при $(1-x)^3 > 0$, т.е. при $1-x > 0$ или при $x \in (-\infty; 1)$ и на этом промежутке график имеет выпуклость вниз, а при $x \in (1; +\infty)$ - выпуклость вверх. Отметим это в таблице 3.

Таблица 3

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f''(x)$	+	не существует	-
$f(x)$	выпуклость вниз	не существует	выпуклость вверх

График функции не имеет точек перегиба, так как производная второго порядка ни в одной точке не обращается в нуль.

6. На основании проведенного исследования построим график функции (Рис. 1.)

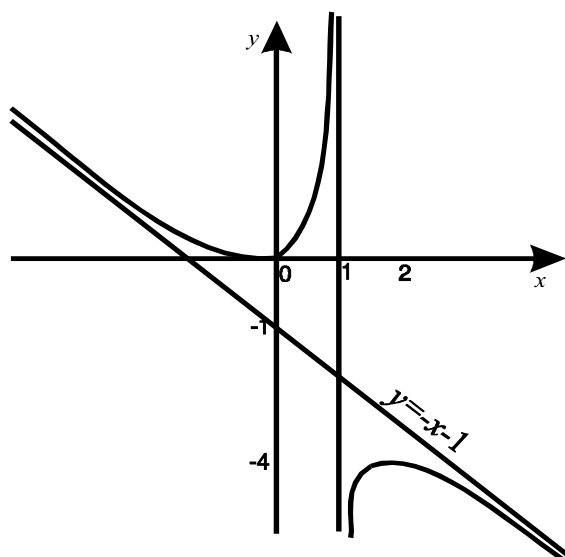


Рис. 1

Семестр II

Раздел 4. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Литература [2], т. 1, гл. VIII, IX.

Основные вопросы.

1. Определение функции нескольких переменных. Геометрическое изображение функции двух переменных. (Гл. VIII, §§ 1, 2)
2. Частное и полное приращение функции нескольких переменных. (Гл. VIII, § 3)
3. Непрерывность функции нескольких переменных. (Гл. VIII, § 4)
4. Частные производные функции нескольких переменных. (Гл. VIII, § 5)
5. Геометрическая интерпретация частных производных функций двух переменных. (Гл. VIII, § 6).
6. Полное приращение и полный дифференциал. (Гл. VIII, § 7)
7. Частные производные высших порядков. (Гл. VIII, § 12)
8. Экстремум функции двух переменных. (Гл. VIII, § 17)
9. Уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности. (Гл. IX, § 6)

Рассмотрим примеры решения задач.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = 6x - x^2 - xy - y^2 - 4$ и вычислить значение функции в точке экстремума.

Решение. Для того чтобы исследовать данную функцию $z = f(x, y)$ на экстремум, необходимо найти частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю или не существуют.

Точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют, называются критическими.

Найденные частные производные приравняем к нулю и решаем полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 6 - 2x - y; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -x - 2y, \end{aligned} \quad \begin{cases} 6 - 2x - y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 6 - 2x - y = 0 \\ x = -2y \end{cases},$$

$$\begin{cases} 6 + 4y - y = 0 \\ x = -2y \end{cases}, \quad \begin{cases} 6 + 3y = 0 \\ x = -2y \end{cases}, \quad \begin{cases} y_0 = -2 \\ x_0 = 4 \end{cases}.$$

Данная функция имеет только одну критическую точку $M_0(4, -2)$.

Как и в случае одной переменной не во всякой критической точке обеспечен экстремум. Для исследования функции в критической точке надо найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в критической точке $M_0(4, -2)$. Введем обозначения:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{M_0}; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{M_0}; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{M_0}. \text{ Составим определитель } \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A \cdot C - B^2.$$

Если $\Delta > 0$ в исследуемой критической точке $M_0(x_0, y_0)$, то функция $z = f(x, y)$ в этой точке имеет экстремум, а именно, при $A < 0$ - максимум, при $A > 0$ - минимум. Если $\Delta < 0$, то в исследуемой точке нет экстремума. Если $\Delta = 0$, то вопрос остается открытым.

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Имеем $A = -2$; $B = -1$; $C = -2$. Тогда

$$\Delta = A \cdot C - B^2 = (-2)(-2) - (-1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A < 0$ то в точке $M_0(4, -2)$ данная функция имеет максимум.

Вычислим значение функции в точке максимума

$$\begin{aligned} z_{\max} &= f(4; -2) = 6 \cdot 4 - 4^2 - 4 \cdot (-2) - (-2)^2 - 4 = \\ &= 24 - 16 + 8 - 4 - 4 = 8 \end{aligned}$$

Ответ: $z_{\max} = f(4; -2) = 8$.

Пример 2. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $3xy^2 - 2yz + 4xz - 4 = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если $x_0 = -1, y_0 = 2$. Вычислить значение аппликаты z_1 точки $M_1(3; 1; z_1)$, лежащей на этой касательной плоскости.

Решение. Определим аппикату z_0 точки касания. Для этого подставляем значения x_0 и y_0 в данное уравнение поверхности

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-1) \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot z_0 + 4(-1) \cdot z_0 - 4 &= 0 \\ -12 - 4z_0 - 4z_0 - 4 &= 0, \quad -8z_0 = 16, \quad z_0 = -2. \end{aligned}$$

Точка касания $M_0(-1; 2; -2)$.

Рассматриваемая поверхность задана уравнением в неявном виде. Уравнение касательной плоскости, проведенной к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеет вид:

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

Найдем частные производные F'_x , F'_y , F'_z и вычислим их значения в точке касания $M_0(-1; 2; -2)$:

$$F'_x = 3y^2 + 4z, \quad F'_x(M_0) = 3 \cdot 2^2 + 4(-2) = 4,$$

$$F'_y = 6xy - 2z, \quad F'_y(M_0) = 6 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot (-2) = -8,$$

$$F'_z = -2y + 4x, \quad F'_z(M_0) = -2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = -8.$$

Подставим значения частных производных в уравнение касательной:

$$4 \cdot (x + 1) - 8 \cdot (y - 2) - 8 \cdot (z + 2) = 0$$

$$4x + 4 - 8y + 16 - 8z - 16 = 0$$

$$4x - 8y - 8z + 4 = 0$$

поделив на 4, получим уравнение касательной плоскости $x - 2y - 2z + 1 = 0$.

Точка $M_1(3; 1; z_1)$ лежит на касательной плоскости, поэтому координаты точки M_1 должны удовлетворять уравнению касательной плоскости.

Подставив их значения в последнее уравнение, найдем z_1 :

$$3 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot z_1 + 1 = 0, \quad -2z_1 + 2 = 0, \quad z_1 = 1.$$

Ответ: $x - 2y - 2z + 1 = 0$; $z_1 = 1$.

Замечание: Если поверхность задана уравнением в явном виде $z = f(x, y)$, то касательная плоскость имеет уравнение:

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + z'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Раздел 5. Неопределенный интеграл и определенный интеграл по фигуре

Тема 1. Неопределенный интеграл

Литература. [1], гл.7; [2], гл. X.

Основные вопросы.

1. Понятие первообразной. Неопределенный интеграл и его свойства. ([1], гл. 7, §§ 1,2)
2. Таблицы основных интегралов. ([1], гл. 7, § 3)
3. Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменных, интегрирование по частям. ([1], гл. 7, § 4)
4. Интегрирование функций вида $\frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c}$ и $\frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$. ([2], гл. X, § 5)
5. Интегрирование рациональных функций. ([1], гл. 7, § 5)
6. Интегрирование иррациональных функций. ([2], гл. X, § 10)
7. Интегрирование тригонометрических функций вида $R(\sin x, \cos x)$. ([2], Гл. X, § 12)

Важным понятием этой темы является понятие первообразной. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Неопределенным интегралом $\int f(x)dx$ от функции $f(x)$ на некотором промежутке называется множество всех первообразных для этой функции на этом промежутке.

Известно, что все первообразные для одной и той же функции на некотором промежутке отличаются друг от друга на постоянную величину, поэтому неопределенный интеграл от функции $f(x)$ равен

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ одна из первообразных для функции $f(x)$ на этом промежутке.

Из этих определений следует, что отыскание неопределенного интеграла является операцией, обратной операции дифференцирования. Поэтому перед изучением этой темы рекомендуется повторить свойства и формулы дифференцирования основных элементарных функций, а также следует выучить таблицу основных интегралов и свойства неопределенных интегралов. Отыскание неопределенного интеграла сводится к приведению его путем последовательных преобразований к табличным интегралам. При этом используются основные методы интегрирования: разложение интегралов на сумму интегралов, замена переменных или подстановка, интегрирование по частям.

Пример 1. Найти $\int \frac{x \sin x + \sqrt[3]{x^2} - 2}{x} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \frac{x \sin x + \sqrt[3]{x^2} - 2}{x} dx &= \int \left(\sin x + \frac{x^{2/3}}{x} - \frac{2}{x} \right) dx = \\ &= \int \sin x dx + \int x^{\frac{2}{3}-1} dx - \int \frac{2}{x} dx = \int \sin x dx + \int x^{-\frac{1}{3}} dx - 2 \int \frac{dx}{x} = \\ &= -\cos x + \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - 2 \ln|x| + C = -\cos x + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - 2 \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Пояснения к решению:

1) Поделив почленно числитель на знаменатель, представили подынтегральную функцию в виде суммы более простых функций.

2) Применили свойство неопределенного интеграла: интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждой функции.

3) В интеграле $\int \frac{2}{x} dx$ вынесли постоянный множитель 2 за знак интеграла.

4) Использовали формулы таблицы основных интегралов.

Ответ: $-\cos x + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - 2 \ln|x| + C$.

Пример 2. Найти $\int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{2 + \sin 3x}}$.

Решение. В этом интеграле надо сделать замену переменных

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{2 + \sin 3x}} &\stackrel{1)}{=} \left\| \begin{array}{l} t = 2 + \sin 3x \\ dt = 3 \cos 3x dx \\ \cos 3x dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right\| = \int \frac{\frac{1}{3} dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{3} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{t} + C \stackrel{2)}{=} \frac{2}{3} \sqrt{2 + \sin 3x} + C. \end{aligned}$$

Пояснения к решению:

1) Делаем замену переменных $2 + \sin 3x = t$. В прямых скобках приведены вспомогательные преобразования.

2) Снова делаем замену переменных, возвращаясь к прежней переменной x .

Ответ: $\frac{2}{3} \sqrt{2 + \sin 3x} + C$.

Пример 3. Найти $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 + 9x^8}}$.

Решение. В этом интеграле тоже надо сделать замену переменных

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 + 9x^8}} = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2^2 + (3x^4)^2}} = \left\| \begin{array}{l} t = 3x^4 \\ dt = 12x^3 dx \\ x^3 dx = \frac{1}{12} dt \end{array} \right\| = \int \frac{\frac{1}{12} dt}{\sqrt{2^2 + t^2}} = \frac{1}{12} \int \frac{dt}{\sqrt{2^2 + t^2}} =$$

$$\frac{1}{12} \ln \left| t + \sqrt{2^2 + t^2} \right| + C = \frac{1}{12} \ln \left| 3x^4 + \sqrt{4 + 9x^8} \right| + C.$$

Ответ: $\frac{1}{12} \ln \left| 3x^4 + \sqrt{4 + 9x^8} \right| + C$.

Пример 4. Найти $\int \frac{(4x-3)dx}{2x^2-2x+1}$.

Решение. $\int \frac{(4x-3)dx}{2x^2-2x+1} = \left\| \begin{array}{l} (2x^2 - 2x + 1)' = 4x - 2 \\ 4x - 2 = 4t \\ x - \frac{1}{2} = t \\ x = t + \frac{1}{2} \\ dx = dt \end{array} \right\| =$

$$= \int \frac{\left(4\left(t + \frac{1}{2}\right) - 3 \right) dt}{2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(t + \frac{1}{2}\right) + 1} = \int \frac{(4t + 2 - 3)dt}{2\left(t^2 + t + \frac{1}{4}\right) - 2t - 1 + 1} =$$

$$= \int \frac{4t - 1}{2t^2 + \frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{4t - 1}{t^2 + \frac{1}{4}} dt = \frac{1}{2} \left(\int \frac{4t dt}{t^2 + \frac{1}{4}} - \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{4}} \right) = 2 \int \frac{t dt}{t^2 + \frac{1}{4}} -$$

$$- \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left\| \begin{array}{l} t^2 + \frac{1}{4} = z \\ dz = 2t dt \\ t dt = \frac{1}{2} dz \end{array} \right\| = 2 \int \frac{\frac{1}{2} dz}{z} - \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \int \frac{dz}{z} - \operatorname{arctg} 2t = \ln |z| - \operatorname{arctg} 2t + C = \ln \left| t^2 + \frac{1}{4} \right| - \operatorname{arctg} 2t + C =$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right) - \operatorname{arctg} 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) + C = \ln \left(x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) - \operatorname{arctg} (2x - 1) + C = \\
&= \ln \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) - \operatorname{arctg} (2x - 1) + C = \ln \frac{2x^2 - 2x + 1}{2} - \operatorname{arctg} (2x - 1) + C = \\
&= \ln (2x^2 - 2x + 1) - \operatorname{arctg} (2x - 1) + C - \ln 2 = \ln (2x^2 - 2x + 1) - \operatorname{arctg} (2x - 1) + C_1.
\end{aligned}$$

Ответ: $\ln(2x^2 - 2x + 1) - \operatorname{arctg}(2x - 1) + C$.

Заметим, что аналогичным способом можно находить интеграл вида $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$, в котором также производную функции $(ax^2 + bx + c)$ обозначают через kt , где в качестве k можно брать любую константу.

Пример 5. Найти $\int x^2 e^{-x} dx$.

Решение. В этом случае необходимо применить формулу интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du$.

$$\begin{aligned}
&\int x^2 e^{-x} dx = \\
&= \left\| \begin{array}{l} u = x^2 \quad du = 2x dx \\ dv = e^{-x} dx \quad v = \int e^{-x} dx = \left\| \begin{array}{l} -x = t \\ dt = -dx \end{array} \right\| = \int e^t (-dt) = -e^t = -e^{-x} \end{array} \right\| = \\
&= x^2 \cdot (-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) \cdot 2x dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = \\
&= \left\| \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = e^{-x} dx \quad v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{array} \right\| = -x^2 e^{-x} + \\
&+ 2 \left(x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) dx \right) = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = \\
&= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C = -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + C.
\end{aligned}$$

Пояснения к решению:

1) Применили формулу интегрирования по частям. Это дало возможность понизить показатель степени степенной функции x^2 .

2) Еще раз применили формулу интегрирования по частям.

Ответ: $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$.

Пример 6. Найти $\int x \operatorname{arctg} 2x dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{arctg} 2x dx &= \left\| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} 2x \quad du = \frac{2}{1 + (2x)^2} dx \\ dv = x dx \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x - \\
&- \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{1 + (2x)^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{x^2}{1 + 4x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \int \frac{(4x^2+1)-1}{4x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1}{4x^2+1}\right) dx = \\
& = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \left(\int dx - \int \frac{dx}{1+4x^2} \right) = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} \int dx + \\
& + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+(2x)^2} = \left\| \begin{array}{l} t = 2x \\ dt = 2 dx \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \int \frac{\frac{1}{2} dt}{1+t^2} = \\
& = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} t + C = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x - \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} 2x + C = \\
& = \frac{4x^2+1}{8} \operatorname{arctg} 2x - \frac{x}{4} + C.
\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4x^2+1}{8} \operatorname{arctg} 2x - \frac{x}{4} + C.$

Тема 2. Определенный интеграл

Литература. [1], гл. 8.

Основные вопросы.

1. Определение определенного интеграла и условия его существования. (§§ 1-3)
2. Основные свойства определенного интеграла. (§§ 4, 5)
3. Формула Ньютона-Лейбница. (§ 7)
4. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. (§§ 8-9)
5. Некоторые геометрические и физические приложения определенного интеграла. (§10)
6. Несобственные интегралы. (§ 11)

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная для непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то определенный интеграл можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

С помощью определенного интеграла можно находить площади плоских фигур, объемы тел, длины дуг кривых, а также решать многие другие задачи.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$

Решение. Найдем сначала неопределенный интеграл

$$\begin{aligned}
\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} &= \left\| \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int t^{-2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + C = \\
&= -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C.
\end{aligned}$$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_1^3 \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(1+x^2)} \Big|_1^3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+3^2} - \frac{1}{1+1^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \right) = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi/4} x \cos^2 x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} x \cos^2 x dx & \stackrel{1)}{=} \int_0^{\pi/4} x \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (x + x \cos 2x) dx = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} x dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} x \cos 2x dx \stackrel{2)}{=} \left\| \begin{array}{l} u=x \quad du=dx \\ dv=\cos 2x dx \quad v=\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right\| = \\ & = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2} \left(x \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin 2x dx \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi/4} + \\ & = \frac{1}{2} \left(x \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\pi/4} \right) = \frac{\pi^2}{64} - 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cos 0 \right) = \frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{64} (\pi^2 + 4\pi - 8). \end{aligned}$$

Поясним решение

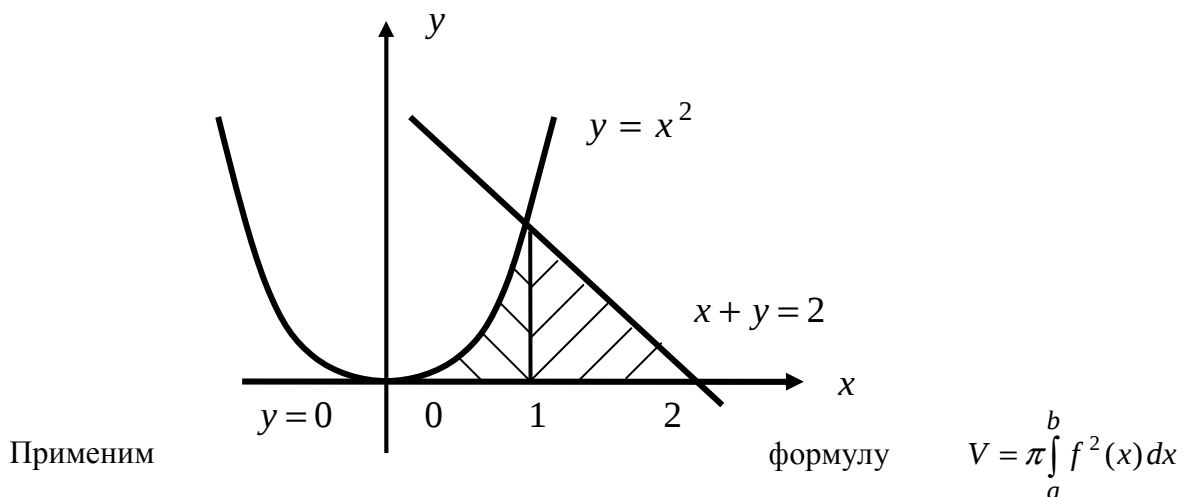
1) Применили тригонометрическую формулу $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, что дало возможность разложить интеграл на сумму двух интегралов.

2) Ко второму интегралу применили формулу интегрирования по частям для определенного интеграла: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$.

Ответ: $\frac{1}{64} (\pi^2 + 4\pi - 8)$.

Пример 3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $x + y = 2$, $y = 0$.

Решение. Сделаем чертеж фигуры:



сначала на отрезке $[0;1]$ к функции $y = x^2$, затем - на отрезке $[1;2]$ к функции $y = 2 - x$.

Тогда

$$V_1 = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5},$$

$$V_2 = \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx = \pi \int_1^2 (x-2)^2 dx = \left\| \begin{matrix} x-2=t \\ dx=dt \end{matrix} \right\| = \pi \int_{-1}^0 t^2 dt = \pi \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^0 = \frac{\pi}{3} (0 - (-1)^3) = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, искомый объем будет равен $V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{3} = \frac{8}{15} \pi$.

Заметим, что объем V_2 можно было найти по известной формуле из элементарной математики, как объем конуса.

Ответ: $\frac{8}{15} \pi$ (ед.³).

Тема 3. Кратные интегралы

Литература [2], гл. XIV, § 1 – 6, 10.

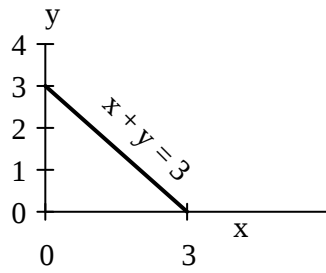
Основные вопросы.

1. Определение двойного интеграла (§1).
2. Свойства двойного интеграла (§1).
3. Вычисление двойного интеграла (§2,3).
4. Двойной интеграл в полярных координатах (§5).
5. Замена переменных в двойном интеграле (§6).

Пример 1. Вычислить при помощи двойного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями:

$$z = 4x^2 + 2y^2 + 1, \quad x + y - 3 = 0, \quad x = 0, y = 0, z = 0.$$

Решение. Сначала найдем проекцию тела на плоскость xy .



Плоскость $x + y - 3 = 0$ параллельна оси OZ , другие поверхности $x = 0, y = 0, z = 0$ являются координатными плоскостями. Заданное тело ограничено сверху эллиптическим параболоидом $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$.

Двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ равен объему криволинейного цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу областью D на плоскости $хоу$. В данном случае объем V тела равен $V = \iiint_D (4x^2 + 2y^2 + 1) dx dy$. Вычислим этот интеграл.

В области D y изменяется от 0 до 3, а x изменяется от $x = 0$ до $x = 3 - y$.

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^3 dy \int_0^{3-y} (4x^2 + 2y^2 + 1) dx = \int_0^3 dy \left[\frac{4}{3} x^3 + 2y^2 x + x \right]_0^{3-y} = \\
 &= \int_0^3 \left[\frac{4}{3} (3-y)^3 + 2y^2 (3-y) + (3-y) - 0 \right] dy = \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^3 (3-y)^3 dy + \int_0^3 (6y^2 - 2y^3 + 3 - y) dy = \\
 &= -\frac{4}{3} \int_0^3 (3-y)^3 d(3-y) + \left(6 \cdot \frac{y^3}{3} - 2 \frac{y^4}{4} + 3y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \\
 &= -\frac{4}{3} \frac{(3-y)^4}{4} \Big|_0^3 + \left(2y^3 - \frac{y^4}{2} + 3y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \\
 &= 0 + \frac{4}{3} \cdot \frac{3^4}{4} + 2 \cdot 3^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^4 + 3 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} = 27 + 54 - \frac{81}{2} + 9 - \frac{9}{2} = 45 \text{ (куб. ед.)}
 \end{aligned}$$

Раздел 9. Дифференциальные уравнения

Литература. [2], т. 2, гл. XIII.

Основные вопросы.

1. Определение дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решения дифференциального уравнения первого порядка. (§§ 2, 3)
2. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения первого порядка. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли. Уравнение в полных дифференциалах. (§§ 4 – 9)
3. Дифференциальные уравнения высших порядков. Некоторые типы дифференциальных уравнений второго порядка, приводимых к уравнениям первого порядка. (§§ 16 - 18)
4. Линейные однородные уравнения. Определения и общие свойства. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. (§§ 20, 21)
5. Неоднородные линейные уравнения второго порядка. Теорема о структуре общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения. Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами со специальными правыми частями. (§§ 23, 24)

Рассмотрим решения некоторых задач по данной теме.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' - \frac{2}{x} \cdot y = x^3.$$

Решение. Данное уравнение является линейным, так как имеет вид $y' + p(x) \cdot y = q(x)$.

Это уравнение решим методом Бернулли, т.е. будем искать решение в виде произведения двух функций $y = u(x) \cdot v(x)$. Дифференцируя, имеем $y' = u'v + uv'$. Подставим значения y и y' в уравнение: $u'v + uv' - \frac{2}{x} \cdot uv = x^3$. Сгруппируем первое и третье слагаемые

и вынесем v за скобки: $v \left(u' - \frac{2}{x} \cdot u \right) + uv' = x^3$. Так как искомая функция y представлена в

виде произведения двух других неизвестных функций, то одну из них можно выбрать произвольно. Подберем функцию u так, чтобы выражение, стоящее в скобках, обращалось в нуль: $u' - \frac{2}{x} \cdot u = 0$. Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися

переменными. Найдем его решение:

$$\frac{du}{dx} = 2 \frac{u}{x}, \quad \frac{du}{u} = 2 \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{u} = \int 2 \frac{dx}{x}, \quad \ln|u| = 2 \ln|x|, \quad u = x^2. \text{ Подставляя в уравнение}$$

$$\text{найденное значение } u(x), \text{ получим: } x^2 \cdot v' = x^3, \quad \frac{dv}{dx} = x, \quad dv = x dx. \quad \int dv = \int x dx,$$

$$v = \frac{x^2}{2} + C.$$

Следовательно, общим решением линейного уравнения будет функция

$$y = u \cdot v = x^2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C \right).$$

$$\text{Ответ: } y = x^2 \left(\frac{x^2}{2} + C \right).$$

Пример 2. Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6.$$

Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 3,2$.

Решение. Структура общего решения данного уравнения определяется следующей основной теоремой:

Теорема. *Общее решение линейного неоднородного уравнения представляется как сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения:* $y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.}$.

Напишем соответствующее однородное уравнение (уравнение с правой частью, равной нулю): $y'' - 2y' + 10y = 0$. Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 2k + 10 = 0$. Решим это уравнение $k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-10}$, $k_{1,2} = 1 \pm 3i$. Здесь корни характеристического уравнения комплексные, т.е. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. В этом случае общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{o.o.} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. В нашем примере $\alpha = 1$, $\beta = 3$, тогда $y_{o.o.} = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. Так как правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид $P_2(x)e^{0x}$, где $P_2(x)$ - многочлен второго порядка, а число 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{ч.н.} = Q_2(x)$, т.е. положим $y_{ч.н.} = Ax^2 + Bx + C$. Найдем производные $y'_{ч.н.} = 2Ax + B$, $y''_{ч.н.} = 2A$. Подставим эти значения в заданное уравнение:

$$2A - 2 \cdot (2Ax + B) + 10 \cdot (Ax^2 + Bx + C) = 10x^2 + 18x + 6.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

при x^2 : $10A = 10$,

при x^1 : $-4A + 10B = 18$,

при x^0 : $2A - 2B + 10C = 6$,

откуда $A = 1$, $B = 2,2$, $C = 0,84$.

Следовательно, $y_{ч.н.} = x^2 + 2,2x + 0,84$. Таким образом, общим решением данного уравнения является функция $y_{o.n.} = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + x^2 + 2,2x + 0,84$.

Теперь решим задачу Коши, т.е. найдем C_1 и C_2 , удовлетворяющие начальным условиям. Найдем производную

$$y_{o.n.} = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^x (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) + 2x + 2,2.$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 3,2 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + 0,84 = 1 \\ C_1 + 3C_2 + 2,2 = 3,2 \end{cases}$$

$$C_1 = 0,16; \quad 3C_2 = 3,2 - 2,2 - 0,16 = 0,84; \quad C_2 = 0,28.$$

В итоге получено частное решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям,

$$y = e^x (0,16 \cos 3x + 0,28 \sin 3x) + x^2 + 2,2x + 0,84$$

Ответ: $y = e^x (0,16 \cos 3x + 0,28 \sin 3x) + x^2 + 2,2x + 0,84$.

Семестр III

Раздел 7. Числовые и функциональные ряды.

Литература. [1], гл. 14; [2], т.2, гл. XVI; [3], гл. 9.

Основные вопросы.

1. Определение числового ряда. Сумма ряда. ([1], гл. 14, § 1; [2], т.2, гл. XVI, § 1)

2. Геометрическая прогрессия. ([1], гл. 14, § 1)
3. Свойства сходящихся рядов. ([1], гл. 14, § 1)
4. Необходимый признак сходимости ряда. ([2], т.2, гл. XVI, § 2)
5. Гармонический ряд. ([2], т.2, гл. XVI, § 2). Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in R$. ([1], гл. 14, § 2)
6. Теоремы сравнения рядов с положительными членами. ([2], т.2, гл. XVI, § 3; [1], гл. 9, § 9.4)
7. Признак Даламбера. ([2], т.2, гл. XVI, § 4)
8. Признак Коши. ([2], т.2, гл. XVI, § 5)
9. Интегральный признак сходимости ряда. ([2], т.2, гл. XVI, § 6)
10. Знакопередающие ряды. Теорема Лейбница. ([2], т.2, гл. XVI, § 7)
11. Знакопередающие ряды. Абсолютная и условная сходимость. ([2], т.2, гл. XVI, § 8)
12. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости. ([2], т.2, гл. XVI, § 13)
13. Ряды по степеням $x - a$. ([2], т.2, гл. XVI, § 15)
14. Ряды Тейлора и Маклорена. ([2], т.2, гл. XVI, § 16).
15. Примеры разложения функций в степенные ряды. ([2], т.2, гл. XVI, § 17; § 19; § 20)

Приведем примеры исследования рядов на сходимость.

Пример 1. Исследовать ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 - 5}{100n^3 + 2}$ на сходимость.

Решение. Бесконечно большая последовательность $(n^3 - 5)$ эквивалентна последовательности n^3 ($(n^3 - 5) \sim n^3$), так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 5}{n^3} = 1$, аналогично, $(100n^3 + 2) \sim 100n^3$. Тогда предел n -го члена ряда равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 5}{100n^3 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{100n^3} = \frac{1}{100}.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то согласно следствию из необходимого признака ряд расходится.

Ответ: Ряд расходится.

Рассмотрим примеры исследования на сходимость рядов с положительными членами.

Пример 2. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n - \sqrt{n}}{n^2 + 1000}$ на сходимость.

Решение. Поскольку имеет место эквивалентность бесконечно больших последовательностей $(2n - \sqrt{n}) \sim 2n$ и $(n^2 + 1000) \sim n^2$, то предел n -го члена ряда равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \sqrt{n}}{n^2 + 1000} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{1}{n}$, то воспользуемся теоремой сравнения, сравнивая данный ряд с рядом, n -ый член которого равен $\frac{1}{n}$, т.е. с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Для этого найдем предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n - \sqrt{n}}{n^2 + 1000} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n - \sqrt{n})}{n^2 + 1000} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2 \neq 0.$$

Поскольку полученное значение предела не равно нулю, то оба ряда с точки зрения сходимости ведут себя одинаково. А так как гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то по теореме сравнения данный ряд также расходится.

Ответ: Ряд расходится.

Пример 3. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$ на сходимость.

Решение. Общий член данного ряда имеет вид $a_n = \frac{n}{(2n+1)!} = \frac{n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$. В

общем члене ряда число множителей увеличивается с возрастанием n . Значит, для исследования этого ряда на сходимость можно воспользоваться признаком Даламбера. Для этого последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \text{а) } a_n &= \frac{n}{(2n+1)!}; & \text{б) } a_{n+1} &= \frac{n+1}{(2(n+1)+1)!} = \frac{n+1}{(2n+3)!}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку полученное значение предела оказалось меньше единицы, т. е. $0 < 1$, то по признаку Даламбера исследуемый ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится.

Пример 4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n-2}{3n+5} \right)^n$ на сходимость.

Решение. Общий член этого ряда имеет вид, $a_n = \left(\frac{7n-2}{3n+5} \right)^n$, т.е. $a_n = (\varphi(n))^n$, зна-

чит, для исследования этого ряда на сходимость можно воспользоваться признаком Коши. Для этого найдем предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{7n-2}{3n+5} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-2}{3n+5} = \frac{7}{3}.$$

Поскольку полученное значение предела оказалось больше единицы, $\frac{7}{3} > 1$, то по признаку Коши исследуемый ряд расходится.

Ответ: Ряд расходится.

Приведем пример исследования на сходимость знакопеременных рядов.

Пример 5. Исследовать ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2n}{5n^3+1}$ на сходимость.

Решение. Данный ряд является знакопеременным, так как $\cos 2n$ может принимать при различных значениях n как положительные, так и отрицательные значения. Составим ряд из модулей членов данного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\cos 2n|}{5n^3+1}$. К полученному ряду с неотрицательны-

ми членами применим теорему сравнения. Поскольку $a_n = \frac{|\cos 2n|}{5n^3+1} \leq \frac{1}{5n^3} \leq \frac{1}{n^3} = b_n$ (для

$n \geq 1$), то для сравнения возьмем обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, который

является сходящимся, так как $\alpha = 3 > 1$. А так как ряд с большими членами сходится, то по теореме сравнения сходится и ряд с меньшими членами. Поскольку ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, сходится, то исходный ряд является сходящимся.

Ответ: Ряд сходится.

Пример 6. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-10)^n}{2^n \sqrt{2n+3}}$.

Решение. Исходный степенной ряд является рядом вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ с коэффициен-

тами $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n \sqrt{2n+3}}$. Делая замену $t = x - 10$ в исходном ряде, получим ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2^n \sqrt{2n+3}}$, расположенный по степеням t . Найдем область сходимости получен-

ного ряда. Для степенных рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ существует такое неотрицательное число R ,

что для всех t , таких, что $|t| < R$, этот ряд абсолютно сходится, а для всех t , таких, что $|t| > R$, этот ряд расходится. Такое число R называется радиусом сходимости степенного ряда.

Для всех t , таких, что $|t| = R$, требуются дополнительные исследования.

Радиус сходимости этого степенного ряда найдем по формуле Даламбера:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n 2^{n+1} \sqrt{2(n+1)+3}}{2^n \sqrt{2n+3} \cdot (-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{2n+5}}{\sqrt{2n+3}} = 2.$$

Следовательно, при всех t , таких что $|t| < 2$, этот степенной ряд абсолютно сходится, а для всех t , таких что $|t| > 2$, этот степенной ряд расходится, т.е. ряд сходится при $-2 < t < 2$.

Проведем дополнительные исследования при всех t , таких что $|t| = 2$. Пусть $t = -2$, тогда получаем ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-2)^n}{2^n \sqrt{2n+3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+3}}.$$

Пусть $t = 2$, тогда получаем знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n \sqrt{2n+3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}.$$

Сначала исследуют на сходимость ряд с положительными членами

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+3}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Применим теорему сравнения, сравнивая этот ряд с обобщенным гар-

моническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Найдём предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Так как полученное значение предела не равно нулю, то оба ряда с точки зрения сходимости ведут себя одинаково. Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ является обобщенным гармоническим рядом, у которого $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, то он расходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ также расходится. Таким образом, степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2^n \sqrt{2n+3}}$ в точке $t = -2$ расходится.

Исследуем теперь на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$. Этот ряд не является абсолютно сходящимся, т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$, составленный из модулей, согласно доказательству, приведенному выше, расходится.

Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$ на условную сходимость. Применим к этому ряду признак Лейбница: а) это знакопеременный ряд; б) члены этого ряда монотонно убывают, т.к. при любом n выполняется неравенство $\frac{1}{\sqrt{2n+3}} > \frac{1}{\sqrt{2n+5}}$; в) предел общего члена этого ряда равен нулю $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+3}} = 0$. Все условия признака Лейбница выполнены, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$ по признаку Лейбница сходится, а поскольку абсолютной сходимости нет, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$ условно сходится.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2^n \sqrt{2n+3}}$ сходится при $-2 < t \leq 2$.

Следовательно, данный ряд сходится при всех x , для которых $-2 < x - 10 \leq 2$, т.е. при $8 < x \leq 12$.

Ответ: Область сходимости имеет вид $8 < x \leq 12$.

Раздел 8. Теория вероятностей и основы математической статистики

Тема 1. Случайные события

Литература. [4], гл. 1–5.

Основные вопросы.

1. Испытания и случайные события. Алгебра событий. Относительная частота. Классическое, геометрическое, аксиоматическое определения вероятности. (Гл. 1, §§ 1–3, 5–8)
2. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условные вероятности. (Гл. 2, §§ 1–3, гл. 3, §§ 1–5, гл. 4, § 1)
3. Формула полной вероятности. Формула Байеса. (Гл. 4, §§ 2, 3)
4. Повторение испытаний. (Гл. 1, § 4; гл. 5, §§ 1–3)

Рассмотрим решения некоторых задач на определение вероятностей событий, в которых используются теоремы сложения вероятностей, умножения вероятностей, формула полной вероятности.

Пример 1. В урне находится 7 белых и 5 красных шаров. Из урны вынимается один шар, отмечается его цвет и шар возвращается в урну. После этого из урны берется еще один шар. Найти вероятность того, что:

- а) оба вынутых шара будут белыми;
- б) оба вынутых шара будут одного цвета.

Решение. В данной задаче опыт или испытание состоит в том, что из урны последовательно вынимают два шара (с возвращением). Рассмотрим следующие события:

A – первый вынутый шар белого цвета;

$\bar{A}$ – противоположное событию A событие, состоящее в том, что первый вынутый шар окажется красным;

B – второй вынутый шар белого цвета;

$\bar{B}$ – второй вынутый шар красного цвета;

C – оба вынутых шара белого цвета;

D – оба вынутых шара одного цвета;

В пункте а) надо найти вероятность $P(C)$ события C . Событие C равно произведению событий A и B , т. е. событие C состоит в том, что в результате опыта произойдут вместе событие A и событие B : $C = A \cdot B$

События A и B - независимые, т.е. вероятность каждого из них не зависит от того, что появится другое событие или нет. По теореме умножения вероятностей

$$P(C) = P(A) \cdot P(B) = \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$$

В пункте б) надо найти вероятность $P(D)$ события D , которое состоит в том, что первый и второй шары либо оба будут белыми (произойдет событие $A \cdot B$), либо оба будут красными (произойдет событие $\bar{A} \cdot \bar{B}$). Таким образом, событие D равно сумме событий $A \cdot B$ и $\bar{A} \cdot \bar{B}$:

$$D = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

События $A \cdot B$ и $\bar{A} \cdot \bar{B}$ несовместные, поэтому по теореме сложения вероятностей вероятность события D будет равна

$$P(D) = P(A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}) = P(A \cdot B) + P(\bar{A} \cdot \bar{B})$$

Воспользуемся теоремой умножения вероятностей независимых событий, тогда

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A) \cdot P(B) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \\ &= \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{37}{72} \end{aligned}$$

Отметим, что вероятности событий $A, B, \bar{A}, \bar{B}$ были найдены по формуле классической вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n - число всех равновероятных несовместных исходов испытания; m - число благоприятных событию A исходов.

Ответ: а) $\frac{49}{144}$; б) $\frac{37}{72}$.

Пример 2. В урне находится 3 белых и 7 черных шаров. Из урны случайным образом вынимаются два шара. Найти вероятность того, что эти шары разных цветов.

Решение. Опыт состоит в том, что вынимают два шара (без возвращения). Рассмотрим следующие события:

A - первый вынутый шар белый;

$\bar{A}$ - первый шар – черный;

B - второй шар – белый;

$\bar{B}$ - второй шар – черный;

C - вынутые шары разных цветов.

Событие C можно представить следующим образом:

$$C = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

События $A \cdot \bar{B}$ и $\bar{A} \cdot B$ - несовместные, поэтому

$$P(C) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B)$$

Поскольку шары вынимаются без возвращения, то события A и $\bar{B}$ зависимые, поэтому вероятность $P(A \cdot \bar{B})$ по теореме умножения вероятностей равна вероятности $P(A)$ первого события A , умноженной на условную вероятность $P(\bar{B} | A)$ второго события $\bar{B}$ при условии, что первое событие A произошло:

$$P(A \cdot \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B} | A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9}.$$

Аналогично

$$P(\bar{A} \cdot B) = P(\bar{A}) \cdot P(B | \bar{A}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9}.$$

Поэтому

$$P(C) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{15}.$$

Ответ: $\frac{7}{15}$.

Пример 3. Вероятность установления в данной местности устойчивого снежного покрова с октября равна 0,1. Определить вероятность того, что в ближайшие три года в этой местности устойчивый снежный покров с октября установится хотя бы один раз.

Решение. Рассмотрим следующие события:

A_1 - в первый ближайший год устойчивый снежный покров установится с октября;

A_2 - во второй ближайший год – установится с октября;

A_3 - в третий ближайший год – установится с октября;

A – в ближайшие три года устойчивый снежный покров установится с октября хотя бы один раз;

$\bar{A}$ – в ближайшие три года с октября не будет ни разу устойчивого снежного покрова.

Найдем вероятность $P(A)$:

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) = \\&= 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = \\&= 1 - (1 - 0,1)(1 - 0,1)(1 - 0,1) = 1 - (0,9)^3 = 0,271\end{aligned}$$

Ответ: 0,271.

Пример 4. Для посева заготовлены семена пшеницы первого сорта, содержащие 1% примесей второго сорта и 3% примесей третьего сорта. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен, равна для первого сорта – 0,5, для второго сорта – 0,2, для третьего сорта – 0,05. Найти вероятность того, что из взятого наудачу зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен.

Решение. Рассмотрим события:

A - событие, состоящее в том, что из наудачу взятого зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен;

H_1 - событие, состоящее в том, что наудачу взятое зерно окажется первого сорта;

H_2 - событие, состоящее в том, что наудачу взятое зерно окажется второго сорта;

H_3 - событие, состоящее в том, что наудачу взятое зерно окажется третьего сорта.

По условию задачи имеем:

$$P(H_1) = 0,96; \quad P(H_2) = 0,01; \quad P(H_3) = 0,03$$

$$P(A|H_1) = 0,5; \quad P(A|H_2) = 0,2; \quad P(A|H_3) = 0,05$$

Применяя формулу полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3),$$

получаем:

$$P(A) = 0,96 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 0,2 + 0,03 \cdot 0,05 = 0,4835$$

Ответ: 0,4835.

Тема 2. Случайные величины

Литература. [4], гл. 6–8, 10–13.

Основные вопросы.

1. Дискретная и непрерывная случайные величины. Примеры дискретных и непрерывных случайных величин. (Гл.6, §§ 1, 2)
2. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. (Гл. 6, §§ 3)
3. Функция распределения и плотность вероятности. Формулы, связывающие функцию распределения и плотность вероятности. (Гл. 10, §§ 1–3; гл. 11 §§ 1–5)
4. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение. (Гл. 7 §§ 1–3, 5; гл. 8, §§ 1 – 4, 6, 7; гл. 12 §1)
5. Формулы для отыскания вероятности попадания случайной величины X в заданный интервал, если известна функция распределения вероятностей или плотность вероятности. (Гл. 10, § 2; гл. 11 § 2)
6. Законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин: биномиальное, Пуассона, равномерное, показательное и нормальное распределения (Гл. 6, §§ 4, 5; гл. 11, § 6; гл. 12, §§ 1–4; гл. 13, §§ 1, 2)

7. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал. Правило трех сигм. (Гл. 12, §§ 5–7).

Приведем примеры решения задач.

Пример 1. Случайная величина X - это число выпадения герба при двух бросках монеты. Построить закон распределения этой случайной величины и найти ее математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(x)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. В данном примере случайная величина X является дискретной, так как может принимать только отдельные, изолированные значения, а именно три значения: 0, 1 или 2. Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится k раз, находится по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. В данной задаче вероятность p выпадения герба при однократном подбрасывании монеты равна $1/2$. Соответственно вероятность противоположного события $q = 1 - p = 1/2$.

Поэтому вероятность того, что при двух бросках герб не выпадет ни разу, т. е. что случайная величина X примет значение, равное 0, будет равна $P_2(0) = C_2^0 p^0 q^2 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Вероятность одного выпадения герба при двух бросках, т. е. вероятность того, что X примет значение, равное 1, будет равна $P_2(1) = C_2^1 p^1 q^1 = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

И, наконец, вероятность того, что оба броска закончатся выпадением герба, т. е. случайная величина X примет значение, равное 2, будет равна $P_2(2) = C_2^2 p^2 q^0 = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

Закон распределения случайной величины X записывается в виде таблицы

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

Теперь найдем характеристики этой случайной величины: ее математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(x)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

$$M(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i - (M(x))^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 - (1)^2 =$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{1/2} \approx 0,707$$

Ответ: $M(X) = 1$; $D(x) = 0,5$; $\sigma(X) = 0,707$.

Пример 2. Найти математическое ожидание $M(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X , если плотность $f(x) = 0$ при

$x < 0$, и равна $f(x) = 5e^{-5x}$ при $x \geq 0$. Как называется закон распределения такой случайной величины?

Решение: Поскольку рассматриваемая случайная величина является непрерывной случайной величиной, то ее математическое ожидание равно

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^{+\infty} x \cdot 5 \cdot e^{-5x} dx = - \int_0^{+\infty} x d(e^{-5x}) = \\ &= -xe^{-5x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-5x} dx = 0 - \frac{e^{-5x}}{5} \Big|_0^{+\infty} = 1/5 \end{aligned}$$

Мы использовали метод интегрирования по частям, а также то, что

$$-xe^{-5x} \Big|_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{5x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{5e^{5x}} = 0$$

(предел нашли по правилу Лопиталя).

Дисперсию непрерывной случайной величины найдем следующим образом

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(x))^2 = \int_0^{+\infty} x^2 5e^{-5x} dx - \frac{1}{25} = \\ &= - \int_0^{+\infty} x^2 d(e^{-5x}) dx - \frac{1}{25} = x^2 e^{-5x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-5x} \cdot 2x dx - \frac{1}{25} = 0 + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{25} = \frac{1}{25}. \end{aligned}$$

Среднее квадратичное отклонение равно

$$\sigma(X) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{1/25} = 1/5.$$

Ответ: $M(x) = 1/5$; $D(x) = 1/25$; $\sigma(x) = 1/5$ Закон распределения – показательный, с параметром $\lambda = 5$.

Пример 3. Найти вероятность попадания в заданный интервал $(0, 6)$ нормально распределенной случайной величины X , если ее математическое ожидание $m = 4$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma = 2$.

Решение: Известно, что вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал (a, b) находится по формуле

$$P(a < X < b) = \Phi((b-m)/\sigma) - \Phi((a-m)/\sigma),$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, значения которой можно найти в таблицах учебников [4, 6].

Следовательно, вероятность попадания в заданный интервал $(0, 6)$ данной случайной величины X равна

$$\begin{aligned} P(0 < X < 6) &= \Phi((6-4)/2) - \Phi((0-4)/2) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \\ &= \Phi(1) + \Phi(2) = 0,3413 + 0,4772 = 0,8185 \end{aligned}$$

Ответ: 0,8185.

Тема 3. Элементы математической статистики

Литература. [4], гл.15, 16

Основные вопросы

1. Предмет и задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Репрезентативность выборки. Способы отбора статистического материала (повторный, случайный, механический). (Гл.15, §§ 1 – 5)
2. Статистическое распределение. Варианты, частоты, относительные частоты. Графическое представление выборки – полигон частот, гистограмма частот. (Гл.15, §§ 6, 8)
3. Эмпирическая функция распределения. Определение, свойства. (Гл.15, § 7)
4. Выборочные характеристики статистического распределения: выборочная средняя $\bar{X}_B$, выборочная D_B и исправленная выборочная s^2 дисперсии, выборочное σ_B и исправленное s выборочное среднее квадратическое отклонение, мода и медиана. (Гл.16, §§ 4, 9,10,)
5. Статистические оценки параметров распределения. Основные определения. Несмещенная, состоятельная и эффективная оценка. Оценки математического ожидания и генеральной дисперсии. (Гл.16, §§ 1, 2, 5, 13)
6. Доверительный интервал. Доверительная вероятность (надежность). Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ . Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения. (Гл.16, §§ 14, 16, 18)

Пример. Дана выборка из 16 элементов некоторого признака X из генеральной совокупности 19, 15, 16, 17, 18, 19, 16, 16, 18, 18, 17, 17, 17, 16, 17, 18. Найти

- 1) Вариационный и статистический ряды;
- 2) Построить полигон относительных частот выборки.
- 3) Эмпирическую функцию распределения и построить ее график.
- 4) Выборочное среднее, выборочную дисперсию, исправленную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленное среднее квадратическое отклонение, моду, медиану, среднее абсолютное отклонение, коэффициент вариации вариационного ряда.
- 5) В предположении, что случайная величина X распределена по нормальному закону, построить доверительный интервал для математического ожидания с надежностью $\gamma = 0,95$.

Решение. Если упорядочим элементы выборки по величине, то получим вариационный ряд:

15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 19, 19

Размах выборки $\omega = 19 - 15$. Объем выборки равен $n = 16$.

Статистический ряд запишем в виде таблицы, где X_i - перечень вариантов вариационного ряда, n_i - соответствующие частоты.

X_i	15	16	17	18	19
n_i	1	4	5	4	2

Контроль: $n = \sum_{i=1}^5 n_i = 16$.

Найдем относительные частоты по формуле $w_i = \frac{n_i}{n}$.

w_i	0,0625	0,25	0,3125	0,25	0,125
-------	--------	------	--------	------	-------

Построим полигон относительных частот выборки (рис. 1) – ломаную линию, соединяющую точки (x_i, w_i) , где x_i – варианты выборки, а w_i – соответствующие им относительные частоты.

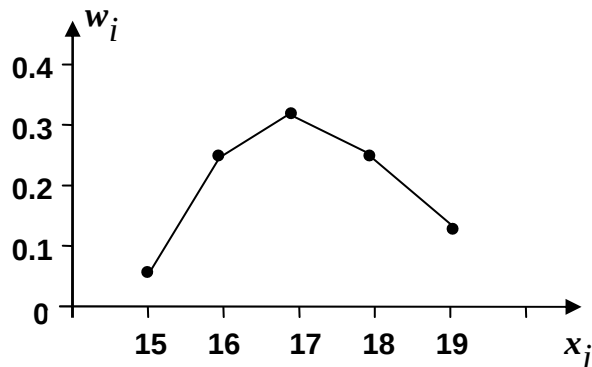


Рис. 1

По данному распределению выборки найдем эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$.

Функция $F^*(x)$ определяет для каждого значения x частоту события $X < x$:

$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x – число вариантов меньше x .

Меньшая варианта равна 15, следовательно, $F^*(x) = 0$ при $x \leq 15$, а при $x > 19$ имеем: $F^*(x) = 1$.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 15 \\ \frac{1}{16} = 0,0625 & \text{при } 15 < x \leq 16 \\ \frac{1+4}{16} = 0,0625 + 0,25 = 0,3125 & \text{при } 16 < x \leq 17 \\ \frac{1+4+5}{16} = 0,3125 + 0,3125 = 0,625 & \text{при } 17 < x \leq 18 \\ \frac{1+4+5+4}{16} = 0,625 + 0,25 = 0,875 & \text{при } 18 < x \leq 19 \\ 1 & \text{при } x > 19 \end{cases}$$

График эмпирической функции распределения изображен на рис.2.

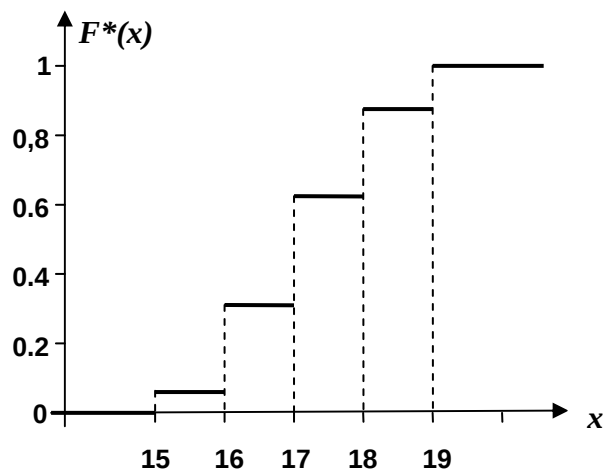


Рис. 2

Найдем выборочные числовые характеристики.

Выборочная средняя

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i = \frac{1}{16} (15 \cdot 1 + 16 \cdot 4 + 17 \cdot 5 + 18 \cdot 4 + 19 \cdot 2) = \\ &= \frac{15 + 64 + 85 + 72 + 38}{16} = \frac{274}{16} = 17,125\end{aligned}$$

Выборочная дисперсия – это среднее арифметическое значение квадратов отклонения признака от выборочного среднего:

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i$$

Для подсчета выборочной дисперсии D_B по этой формуле составим следующую таблицу.

$x_i - \bar{x}_B$	$(x_i - \bar{x}_B)^2$	$(x_i - \bar{x}_B)^2 n_i$
-2,125	4,5156	4,516
-1,125	1,2656	5,062
-0,125	0,0156	0,078
0,875	0,7656	3,062
1,875	3,5156	7,031
		$\Sigma=19,749$

$$D_B \approx \frac{19,749}{16} \approx 1,2343.$$

В данном примере для вычисления выборочной дисперсии

больше подходит формула

$$D_B = \overline{x^2} - (\bar{x}_B)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 n_i - (\bar{x}_B)^2$$

Для отыскания $\overline{x^2}$ составим таблицу

x_i^2	225	256	289	324	361
n_i	1	4	5	4	2
$n_i x_i^2$	225	1024	1445	1296	722
					$\Sigma=4712$

$$(\bar{x}_B)^2 = (17,125)^2 \approx 293,2656,$$

$$D_B \approx -\frac{4712}{16} - 293,2656 \approx 294,5 - 293,2656 = 1,2344.$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} \approx 1,111.$$

Выборочная дисперсия является смещенной оценкой дисперсии исследуемой случайной величины.

Несмещенной оценкой дисперсии является исправленная дисперсия s^2

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{16}{15} 1,2344 \approx 1,3167$$

Исправленное среднее квадратическое отклонение равно

$$s = \sqrt{s^2} \approx 1,147$$

Модой M_0 называют значение признака, которое имеет наибольшую частоту: $M_0 = 17$.

Медианой m_e называют значение признака, который делит вариационный ряд на две равные части. Медиану находят по следующей формуле

$$m_e = \begin{cases} x_{k+1}, & \text{если } n = 2k + 1 \\ \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, & \text{если } n = 2k \end{cases}$$

$$\text{В данном примере медиана } m_e = \frac{17+17}{2} = 17$$

Коэффициент вариации:

$$V = \frac{\sigma_b}{x_b} \cdot 100\% = \frac{1,11}{17,125} \cdot 100\% \approx 6,49\%$$

Среднее абсолютное отклонение:

$$\theta = \sum_{i=1}^n \frac{n_i |x_i - \bar{x}_b|}{n} = \frac{|15 - 17,125| \cdot 1 + |16 - 17,125| \cdot 4 + \dots}{n}$$

$$\frac{+|17-17,125| \cdot 5 + |18-17,125| \cdot 4 + |19-17,125| \cdot 2}{16} =$$

$$= \frac{14,5}{16} \approx 0,906$$

Доверительный интервал для оценки математического ожидания определяется по формуле:

$$\left(\bar{x}_B - t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}}; \bar{x}_B + t_\gamma \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}} \right)$$

Имеем $\bar{x}_B = 17,125$, $n = 16$, $s = 1,147$. Число t_γ определяем по таблице значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$, где γ - надежность, а n - объем выборки (см. приложение 3 в [5]). В данном примере $\gamma = 0,95$, $n = 16$. По таблице значений t_γ находим $t_\gamma = t(0,95; 16) = 2,13$

Левый конец интервала равен

$$17,125 - 2,13 \cdot \frac{1,147}{3,873} \approx 16,49,$$

а правый его конец равен

$$17,125 + 2,13 \cdot \frac{1,147}{3,873} \approx 17,76.$$

Доверительный интервал (16,49; 17,76) покрывает неизвестное математическое ожидание с надежностью $\gamma = 0,95$.

Ответ: $\bar{x}_B = 17,125$; $D_B \approx 1,23$; $s^2 \approx 1,32$; $\sigma_B \approx 1,11$; $s \approx 1,15$; $M_0 = 17$; $m_e = 17$; $V \approx 6,49\%$; $\theta \approx 0,91$; доверительный интервал для оценки математического ожидания: (16,49; 17,76).

Литература

1. В.С. Шипачев, Высшая математика, М.: Высшая школа, 2002.
2. Н.С. Пискунов, Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2, М.: Наука, 2005.
3. Я.Ф.Бугров, С.М.Никольский, Дифференциальное и интегральное исчисление, М., Дрофа, 2006.
4. В.Е. Гмурман, Теория вероятностей и математическая статистика, М.,: Высшее образование, 2008.
5. Д.В.Клетеник, Сборник задач по аналитической геометрии, СПб.: Профессия, 2007.
6. Г.Н.Берман, Сборник задач и упражнений по математическому анализу, СПб.: Профессия, 2006.
7. В.Е. Гмурман, Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, М.: Высшее образование, 2006.