Тема 4. Неопределенный интеграл

Важным понятием этой темы является понятие первообразной. Первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке называется функция $F(x)$, удовлетворяющая на этом промежутке соотношению

$$F'(x) = f(x).$$

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на некотором промежутке называется множество всех первообразных для этой функции. Известно, что все первообразные для одной и той же функции на некотором промежутке отличаются друг от друга на постоянную величину. поэтому неопределенный интеграл от функции $f(x)$ равен

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Из этих определений следует, что отыскание неопределенного интеграла является операцией, обратной операции дифференцирования. Поэтому перед изучением этой темы рекомендуется повторить свойства и формулы дифференцирования основных элементарных функций, а также следует выучить таблицу основных интегралов и свойства неопределенных интегралов. Отыскание неопределенного интеграла сводится к приведению его путем последовательных преобразований к табличным интегралам. При этом используются основные методы интегрирования: разложение интегралов на сумму интегралов, замена переменных или подстановка, интегрирование по частям.

Пример 1. Найти $\int \frac{x\sin x + \sqrt[3]{x^2} - 2}{x} dx$.

Решение. $\int \frac{x\sin x + \sqrt[3]{x^2} - 2}{x} dx \overset{1)}{=} \int \left(\sin x + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} - \frac{2}{x} \right) dx \overset{2)}{=}$

$$=\int \sin x\,dx+\int x^{\frac{2}{3}-1}dx-\int \frac{2}{x}dx \overset{3)}{=} \int \sin x\,dx+\int x^{-\frac{1}{3}}dx-2\int \frac{dx}{x} \overset{4)}{=}$$

$$-\cos x+\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}-2\ln|x|+C==-\cos x+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-2\ln|x|+C.$$

Пояснения к решению

1) Поделив почленно числитель на знаменатель представили подынтегральную функцию в виде суммы более простых функций.
2) Применили свойство неопределенного интеграла: интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от каждой функции.
3) В третьем интеграле $\int \frac{2}{x}dx$ вынесли постоянный множитель за знак интеграла.
4) Использовали таблицу основных интегралов.

Пример 2. Найти $\int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{2+\sin 3x}}$.

Решение. В этом интеграле надо сделать замену переменных

$$\int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{2+\sin 3x}} \overset{1)}{=} \left\| \begin{array}{l} d\left(2+\sin 3x\right)=\cos 3x\cdot 3dx \\ 2+\sin 3x=t \\ dt=3\cos 3x\,dx \\ \cos 3x\,dx=\frac{1}{3}dt \end{array} \right\| = \int \frac{\frac{1}{3}dt}{\sqrt{t}}=$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{t}+C\overset{2)}{=}\frac{2}{3}\sqrt{2+\sin 3x}+C.$$

Пояснения к решению

1) Делаем замену переменных $2+\sin 3x=t$. В прямых скобках в первой строке показано, почему делается именно такая замена. В остальных строках приведены вспомогательные выкладки.

2) Снова делаем замену переменных, возвращаясь к прежней переменной *x*.

Пример 3. Найти $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{4+9x^8}}$.

Решение. В этом интеграле тоже надо сделать замену переменных

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{4+9x^8}}=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{2^2+\left(3x^4\right)^2}}=\left\|\begin{array}{l}d\left(3x^4\right)=12x^3dx\\3x^4=t\\dt=12x^3dx\\x^3dx=\frac{1}{12}dt\end{array}\right\|=\int\frac{\frac{1}{12}dt}{\sqrt{2^2+t^2}}$$

$$=\frac{1}{12}\int\frac{dt}{\sqrt{2^2+t^2}}=$$

$$=\frac{1}{12}\ln\left|t+\sqrt{2^2+t^2}\right|+C=\frac{1}{12}\ln\left|3x^4+\sqrt{4+9x^8}\right|+C.$$

Пример 4. Найти $\int\frac{(4x-3)dx}{2x^2-2x+1}$.

Решение.

$$\int \frac{(4x-3)dx}{2x^2-2x+1} = \left\| \begin{array}{l} \left(2x^2-2x+1\right)' = 4x-2 \\ 4x-2=4t \\ x-\frac{1}{2}=t \\ x=t+\frac{1}{2} \\ dx=dt \end{array} \right\| =$$

$$\int \frac{\left(4\left(t+\frac{1}{2}\right)-3\right)dt}{2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-2\left(t+\frac{1}{2}\right)+1} =$$

$$= \int \frac{(4t+2-3)dt}{2\left(t^2+t+\frac{1}{4}\right)-2t-1+1} = \int \frac{(4t-1)dt}{2t^2+2t+\frac{1}{2}-2t} =$$

$$\int \frac{4t-1}{2t^2+\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{4t-1}{t^2+\frac{1}{4}}dt =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\frac{4tdt}{t^2+\frac{1}{4}}-\int\frac{dt}{t^2+\frac{1}{4}}\right)=2\int\frac{tdt}{t^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$\left\|\begin{array}{l} d\left(t^2+\frac{1}{4}\right)=2t\,dt \\ t^2+\frac{1}{4}=z \\ dz=2t\,dt \\ t\,dt=\frac{1}{2}dz \end{array}\right\|=$$

$$=2\int\frac{\frac{1}{2}dz}{z}-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{2}}=\int\frac{dz}{z}-\operatorname{arctg}2t=\ln|z|-\operatorname{arctg}2t+C$$

$$=\ln\left|t^2+\frac{1}{4}\right|-\operatorname{arctg}2t+C=$$

$$=\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)-\operatorname{arctg}2\left(x-\frac{1}{2}\right)+C=$$

$$\ln\left(x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)-\operatorname{arctg}(2x-1)+C=$$

$$=\ln\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)-\operatorname{arctg}(2x-1)+C=$$

$$\ln\frac{2x^2-2x+1}{2}-\operatorname{arctg}(2x-1)+C=$$

$$= \ln\left(2x^2 - 2x + 1\right) - \operatorname{arctg}(2x - 1) + C - \ln 2 =$$

$$\ln\left(2x^2 - 2x + 1\right) - \operatorname{arctg}(2x - 1) + C_1 .$$

Заметим, что аналогичным способом можно находить как интеграл вида $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$, так и интеграл вида $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$, в котором также производную функции $\left(ax^2 + bx + c\right)$ обозначают через *kt*, где в качестве *k* можно брать любую константу.

Пример 5. Найти $\int x^2 e^{-x} dx$.

Решение. В этом случае необходимо применить формулу интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^2 e^{-x} dx \overset{1)}{=}$$

$$\left\| \begin{matrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx & v = \int e^{-x}dx = \left\| \begin{matrix} -x = t \\ dt = -dx \end{matrix} \right\| = \int e^t\left(-dt\right) = -e^t = -e^{-x} \end{matrix} \right\| =$$

$$= x^2 \cdot \left(-e^{-x}\right) - \int \left(-e^{-x}\right) \cdot 2xdx =$$

$$-x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx \overset{2)}{=} \left\| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{matrix} \right\| =$$

$$=-x^2e^{-x}+2\left(x\left(-e^{-x}\right)-\int\left(-e^{-x}\right)dx\right)=$$

$$-x^2e^{-x}-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx=$$

$$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C=-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)+C.$$

Пояснения к решению

1) Применили формулу интегрирования по частям. Это дало возможность понизить показатель степени степенной функции.
2) Еще раз применили формулу интегрирования по частям.

Пример 6. Найти $\int x\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям.

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx=\left\|\begin{matrix} u=\mathrm{arctg}\,2x & du=\dfrac{2}{1+(2x)^2}dx \\ dv=x\,dx & v=\int x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right\|=$$

$$\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,2x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{1+(2x)^2}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,2x-\int\frac{x^2}{1+4x^2}dx=$$

$$\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,2x-\frac{1}{4}\int\frac{\left(4x^2+1\right)-1}{4x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,2x-$$

$$-\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1}{4x^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,2x-\frac{1}{4}\left(\int dx-\int\frac{dx}{1+4x^2}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4}\int dx + + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+(2x)^2} = \left\| \begin{array}{l} 2x = t \\ dt = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\|$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{2}dt}{1+t^2} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4}x +$$

$$+ \frac{1}{8}\operatorname{arctg} t + C = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} 2x - \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{arctg} 2x + C =$$

$$\frac{4x^2+1}{8}\operatorname{arctg} 2x - \frac{x}{4} + C.$$

Пример 7. Найти $\int \frac{x^4+2x^2-2x+4}{x^4+2x^2}dx$.

Решение. Подынтегральная функция является дробно-рациональной. Прежде всего следует отметить, что эта рациональная дробь неправильная, так как степень числителя равна степени знаменателя. Выделим целую часть путем деления числителя на знаменатель. Это можно сделать либо делением уголком многочлена на многочлен, либо следующим образом:

$\frac{\left(x^4+2x^2\right)-2x+4}{x^4+2x^2} = 1 + \frac{-2x+4}{x^4+2x^2}$. Второе слагаемое является правильной дробью. Разложим знаменатель на простейшие множители: $\frac{-2x+4}{x^4+2x^2} = \frac{-2x+4}{x^2\left(x^2+2\right)}$. Разложим правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей:

$\dfrac{-2x+4}{x^2\left(x^2+2\right)}=\dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2}$. Найдем коэффициенты *A*, *B*, *C* и *D* методом неопределенных коэффициентов. Приведем правую часть к общему знаменателю: $\dfrac{-2x+4}{x^2\left(x^2+2\right)}=\dfrac{A\left(x^2+2\right)+Bx\left(x^2+2\right)+\left(Cx+D\right)x^2}{x^2\left(x^2+2\right)}$. Поскольку у дробей равны знаменатели, то будут равны их числители: $-2x+4=Ax^2+2A+Bx^3+2Bx+Cx^3+Dx^2$.

Два многочлена тождественно равны лишь при условии равенства коэффициентов при одинаковых степенях:

$$\begin{array}{l} x^3: \\ x^2: \\ x: \\ x^0: \end{array}\begin{cases} B+C=0 \\ A+D=0 \\ 2B=-2 \\ 2A=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ C=1 \\ D=-2 \end{cases}.$$

Итак, получаем $\dfrac{-2x+4}{x^2\left(x^2+2\right)}=\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{x-2}{x^2+2}$. Вернемся к данному интегралу

$$\int\frac{x^4+2x^2-2x+4}{x^4+2x^2}dx=\int\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{x-2}{x^2+2}\right)dx=$$

$$\int dx-2\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{x-2}{x^2+2}dx=$$

$$=x-2\int x^{-2}dx-\ln|x|+\int\left(\frac{x}{x^2+2}-\frac{2}{x^2+2}\right)dx=$$

$$x+2x^{-1}-\ln|x|+\int\frac{x\,dx}{x^2+2}-2\int\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=\left\|\begin{matrix} x^2+2=t \\ dt=2x\,dx \\ x\,dx=\frac{1}{2}dt \end{matrix}\right\|=x+\frac{2}{x}-\ln|x|+\int\frac{\frac{1}{2}dt}{t}-2\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$x+\frac{2}{x}-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+$$

$$+C=x+\frac{2}{x}-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)-\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Задачи для самостоятельной работы.

401-410. Найти неопределенные интегралы:

401) а) $\int\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$; в) $\int x\cos 3x\,dx$; г) $\int\frac{(x+6)\,dx}{x^3-4x}$; д) $\int\sin^3 x\,dx$.

402) а) $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt[4]{\cos^3 x}}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x}}$; в) $\int x^3\ln x\,dx$; г) $\int\frac{2dx}{x^2+2x}$;д). $\int\cos^3 x\,dx$.

403) а) $\int\frac{(1+ctgx)\,dx}{\sin^2 x}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-2x-x^2}}$; в) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$; г) $\int\frac{dx}{x^3+2x^2}$;д) $\int\sin^2 3x\,dx$.

404) а) $\int \frac{x\,dx}{2+3x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+4}$; в) $\int x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$; г) $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2-2x}$; д) $\int \sin^2 2x dx$.

405) а) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^6}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$; в) $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$; г) $\int \frac{8}{x^3-4x} dx$; д) $\int \frac{2+3\cos^2 x dx}{\cos^2 x}$.

406) а) $\int \frac{\cos x\,dx}{4+\sin^2 x}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$; в) $\int \ln\left(1+x^2\right) dx$; г) $\int \frac{6}{x^2-9x} dx$; д) $\int \frac{(\cos^2 x-2)dx}{3\sin^2 x}$.

407) а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$; в) $\int \frac{\ln x}{x^4} dx$; г) $\int \frac{dx}{x^3+2x^2}$; д) $\int \cos 3x \sin 4x\,dx$.

408) а) $\int \frac{\left(1-tg^2 x\right) dx}{\cos^2 x}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-7}}$; в) $\int x \sin 4x dx$; г) $\int \frac{dx}{x^3+4x^2+3x}$; д). $\int \cos 3x \cos 4x dx$

409) а) $\int \frac{arctg^2 x dx}{1+x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; в) $\int \sqrt{x} \ln x\,dx$; г) $\int \frac{(4-2x)\,dx}{x^2+4x}$; д). $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$

410) а) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-4x^4}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$; в) $\int \frac{\ln 2x}{x^3}\,dx$; г) $\int \frac{dx}{x^3-x}$;

д). $\int tg^3 x dx$