

Вариант 3

Контрольная работа №1

Задача 103. Даны вершины пирамиды $A_1A_2A_3A_4$:

$A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$. Найти: 1) внутренний угол при вершине A_1 в треугольнике $A_1A_2A_4$; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) объем пирамиды

$A_1A_2A_3A_4$;

$A_1(2; 0; -1)$, $A_2(-2; -11; 5)$, $A_3(1; -4; -1)$, $A_4(-2; 1; -4)$.

Задача 113. Даны вершины $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ треугольника. Найти: 1) уравнение стороны AB ; 2) уравнение медианы, проведенной из вершины C ; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины C ; 4) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB .

$A(-13; 3)$, $B(-1; -3)$, $C(2; 2)$.

Задача 123. Даны вершины $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$ пирамиды. Найти: 1) уравнение плоскости, проходящей через вершины A_1 , A_2 , A_3 ; 2) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 3) уравнение высоты, проведенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 4) уравнение плоскости, проходящей через вершину A_4 параллельно грани $A_1A_2A_3$; 5) уравнение прямой, проходящей через вершину A_2 параллельно ребру A_1A_4 .

$A_1(2; 0; -1)$, $A_2(-2; -11; 5)$, $A_3(1; -4; -1)$, $A_4(-2; 1; -4)$.

Задача 203. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 - 7x + 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{3x}}{\sin 4x}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5 - x} - 1}{x - 4}$.

Задача 213. Для заданных функций найти

а) первую производную y' и вторую производную y'' ;

б), в) первую производную y' ;

г) дифференциал dy .

а) $y = 4x^2 - \frac{5}{3x^6} + 1$; б) $y = (2x^2 - 7x) \cdot 10^{(1-x)}$; в) $y = \frac{x}{\sin^2 x}$;

г) $y = \operatorname{ctg}^2 x$.

Задача 223. Найти предел с помощью правила Лопиталья

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3};$$

Задача 233. Провести полное исследование данной функции и построить ее график

$$y = \frac{2}{x^2 + 2x}$$

Задача 243. Исследовать данную функцию $z = f(x, y)$ на экстремум и вычислить значение функции в точках экстремума:

$$z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y + 2,$$

Задача 253. Дано уравнение поверхности в виде $F(x, y, z) = 0$ или $z = f(x, y)$. Требуется составить уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если абсцисса x_0 и ордината y_0 заданы. Найти также аппликату z_1 точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, лежащей на этой касательной плоскости, если даны абсцисса x_1 и ордината y_1 точки M_1 :

$$x^2z - 2xy^2 + 2yz + y + 1 = 0, M_0(2; -1; z_0), M_1(0; 1; z_1).$$

Контрольная работа №2

Задача 303. Найти неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{(1 + \operatorname{ctg} x) dx}{\sin^2 x}; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 2x - x^2}}; \quad \text{в) } \int \frac{\ln x}{x^2} dx; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{x^3 + 2x^2};$$

$$\text{д) } \int \sin^2 3x dx.$$

Задача 313

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 2 - x$.

Задача 323 Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Область интегрирования изобразить на чертеже.

$$z = 8 - x^2 - 2y^2, y = 2 - 2x, x = 0, y = 0, z = 0.$$

Задача 403 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения первого порядка:

$$xy' + y \ln \frac{y}{x} = 0$$

Задача 413 Дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Найти частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

$$y'' + y' = 3 \cos x - \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

Задача 503. Найти область сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{n+4};$$